

2018

# Fatigue Crack Growth Rate Curve Based on the CJP Model and Its Application Method

YANG, B

<http://hdl.handle.net/10026.1/13576>

---

10.3901/jme.2018.18.076

Journal of Mechanical Engineering

Chinese Journal of Mechanical Engineering

---

*All content in PEARL is protected by copyright law. Author manuscripts are made available in accordance with publisher policies. Please cite only the published version using the details provided on the item record or document. In the absence of an open licence (e.g. Creative Commons), permissions for further reuse of content should be sought from the publisher or author.*

DOI: 10.3901/JME.2018.18.076

# 基于 CJP 模型的疲劳裂纹扩展率曲线及应用方法\*

杨冰<sup>1</sup> JAMES M N<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室 成都 610031;  
2. 普利茅斯大学工程学院 普利茅斯 PL4 8AA 英国)

**摘要:** 利用数字图像相关技术开展工业纯钛 5 种不同高宽比 CT 试样的疲劳裂纹扩展率试验, 分别采用传统应力强度因子范围  $\Delta K$  和基于 CJP 模型理论框架的新应力强度因子范围  $\Delta K_{CJP}$  对数据进行分析, 得到的  $da/dN-\Delta K$  和  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  曲线均有效反映了试验数据分布规律, 具有良好的拟合效果。相较于传统参量  $\Delta K$ ,  $\Delta K_{CJP}$  直接由裂尖位移场求解, 无需进行修正即可用于材料疲劳裂纹扩展率描述, 具有与 CT 试样高宽比无关的特性; 作为  $\Delta K_{CJP}$  的两个组成参量,  $\Delta K_F$ 、 $\Delta K_R$  与传统  $\Delta K$  数据间均呈现出某种总体变化趋势, 分别可用二次多项式和线性方程表征。构造了  $\Delta K_{CJP}$  与  $\Delta K$  的关联函数, 并由此推导出  $\Delta K_{CJP}$  表达式, 为  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  曲线在材料与结构的失效分析和安全评价中的应用提供了有效途径, 拓宽了 CJP 模型的工程应用范围。

**关键词:** CJP 模型; 裂尖位移场; 数字图像相关; 裂纹扩展率; 工业纯钛  
**中图分类号:** O346

## Fatigue Crack Growth Rate Curve Based on the CJP Model and Its Application Method

YANG Bing<sup>1</sup> JAMES M N<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031;  
2. School of Engineering, University of Plymouth, Plymouth PL4 8AA, UK)

**Abstract:** Fatigue crack growth rate tests of commercial pure titanium specimens with 5 different height-width ratios of CT specimens using the digital image correlation technique are carried out. The traditional stress intensity factor range,  $\Delta K$ , and the new definition of the stress intensity factor range,  $\Delta K_{CJP}$ , which is under the theory of the CJP model, are utilized in the analysis of the test data. Both the  $da/dN-\Delta K$  curve and the  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  curve reflect the distribution of the test data effectively and show good fitting effects. Compared to the traditional  $\Delta K$ , the  $\Delta K_{CJP}$  is obtained directly from the displacement fields near the crack tip and can be utilized without correction, and has a characteristic of height-width ratio-independent for CT specimens. Furthermore, as two component parameters of  $\Delta K_{CJP}$ , both  $\Delta K_F$  and  $\Delta K_R$  show some certain general change trends with the traditional  $\Delta K$ , which can be described by using the quadratic polynomial and the linear equation respectively. Based on this, a correlation curve is constructed to determine the expression of  $\Delta K_{CJP}$ . Thus, an effective approach is established for using the  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  curve in the failure analysis and the safety assessment of materials and structures, which extends the engineering applications of the CJP model.

**Key words:** CJP model; crack tip displacement fields; digital image correlation; crack growth rate; commercial pure titanium

## 0 前言

受裂纹尖端及裂纹面周围塑性区影响, 疲劳裂纹扩展过程中可能出现塑性诱导裂纹闭合现象<sup>[1]</sup>, 导致全局弹性应力场下的裂纹扩展局部应变场变得十分复杂, 实际应力强度因子范围低于名义值<sup>[2-3]</sup>。对包括塑性诱导在内的裂纹闭合效应研究, 学术界从测试手段到表征方法仍存在不同观点, 对

其产生机理的认识也尚不充分<sup>[4-8]</sup>。造成该状况的一个重要原因是, 传统针对裂纹闭合效应的试验通常依赖于间接测试方法。为此, JAMES 等<sup>[9]</sup>借助光弹性应力分析方法, 以具有良好延展性的聚碳酸酯材料为对象, 实现了对塑性诱导裂纹闭合效应的直接观测。在此基础上, PACEY 等<sup>[10]</sup>将光弹性应力分析法拓展至裂纹尖端塑性诱导屏蔽效应研究, 提出一种描述高度局域化应力场的简化模型。该模型基于 MUSKHELISHVILI 势函数法<sup>[11]</sup>, 采用 WESTERGAARD 方程特例<sup>[12]</sup>, 结合遗传算法和下降单纯形法, 能对弹性体内受载但处于闭合状态的

\* 国家自然科学基金资助项目(51675446)。20180228 收到初稿, 20180706 收到修改稿

裂纹尖端应力场进行预测，有效地促进了对塑性诱导裂纹闭合现象本质的认识。

2007年, CHRISTOPHER 等<sup>[13]</sup>提出了一种新的裂尖应力场模型, 即 CJP 模型。尽管同样基于 MUSKHELISHVILI 势函数法, 但与 PACEY 的简化模型不同, CJP 模型在 WESTERGAARD 表达式中引入额外项, 用一种更为精确的多参数表达式来描述屏蔽作用。模型在假定因裂纹尾迹接触和变形协调需要产生的弹-塑性区域边界上弹性应力分布基础上, 定义了几个形式上与早期 IRWIN 弹性应力强度因子类似的新的应力强度因子, 它们反映了名义应力与任何塑性诱导下弹性应力的共同作用。CJP 模型首次清晰阐释了弹性应力场中的塑性诱导屏蔽现象, 是具有革新意义的裂尖应力场模型。

最初, CJP 模型在基于应力法、与全场光弹性干涉图样进行直接比较的双折射材料疲劳裂纹裂尖场描述中得到应用<sup>[14]</sup>。随后, 借助在合金相变局部化分析<sup>[15]</sup>、结构变形全场测量<sup>[16]</sup>等领域常用的数字图像相关(DIC)技术<sup>[17]</sup>, JAMES 等<sup>[18]</sup>发展出了直接基于全场位移的裂尖位移场描述, 将 CJP 模型的应用范围拓展至金属材料。与此同时, CHRISTOPHER 等<sup>[19]</sup>通过在原模型中引入一个反映 II 型加载模式下的应力强度因子新参量  $K_{II}$ , 使 CJP 模型能同样适应于 I、II 混合型裂纹, 被称为双轴 CJP 模型, 它为斜裂纹裂尖应力场的描述提供了有效手段。LABOVICIUTE 等<sup>[20]</sup>借鉴双轴 CJP 模型, 开展了具有不同初始裂纹角度的 2024-T6 铝合金紧凑拉伸试样的疲劳裂纹扩展试验, 尽管仍存在一些未能解释的观测结果, 但有效地证明了进一步研究 CJP 模型

的意义和价值。VASCO-OLMO 等<sup>[21]</sup>基于 von MISES 和 TRESCA 屈服准则, 对裂纹扩展过程中的裂尖塑性区形状和尺寸进行了分析, 比较了 WESTERGAARD、WILLIAMS 和 CJP 三种弹性裂尖应力场模型的预测效果, 结果表明 CJP 模型对试验获得的裂尖塑性区形状和尺寸预测最为准确。

本文是在上述研究基础上, 对 CJP 模型应用方向的另一种拓展。利用 DIC 技术, 开展工业纯钛紧凑拉伸(CT)试样疲劳裂纹扩展率试验, 研究不同试样高宽比对裂纹扩展行为的影响。基于传统应力强度因子范围  $\Delta K$  和 CJP 模型理论框架下新的有效应力强度因子范围  $\Delta K_{CJP}$ , 分别得到了传统裂纹扩展率曲线  $(da/dN-\Delta K)$  和 CJP 裂纹扩展率曲线  $(da/dN-\Delta K_{CJP})$ 。结果表明, 由于 CJP 模型有效考虑了塑性诱导屏蔽效应对驱动裂纹扩展的弹性应力场的影响, 直接由裂尖位移场数据支撑的 CJP 裂纹扩展率曲线表现出与试样高宽比无关的特性, 显示出 CJP 模型在裂尖与裂纹尾迹塑性区描述能力之外的工程应用价值。

### 1 CJP 模型

CJP 模型是一种基于 MUSKHELISHVILI 势函数的新的裂尖场模型<sup>[13]</sup>, 是本文工作的理论基础, 为便于后续各部分阐述, 本节对 CJP 模型进行简要介绍。

疲劳裂纹扩展过程中, 围绕裂尖和裂纹面存在的塑性区会削弱弹性应力场的作用效果, 产生“屏蔽”效应; 而裂尖屏蔽既包括裂纹面接触力(即裂纹闭合), 又包括因变形协调而在弹-塑性区域边界产生的剪应力。CHRISTOPHER 等<sup>[13]</sup>给出了图 1 所示

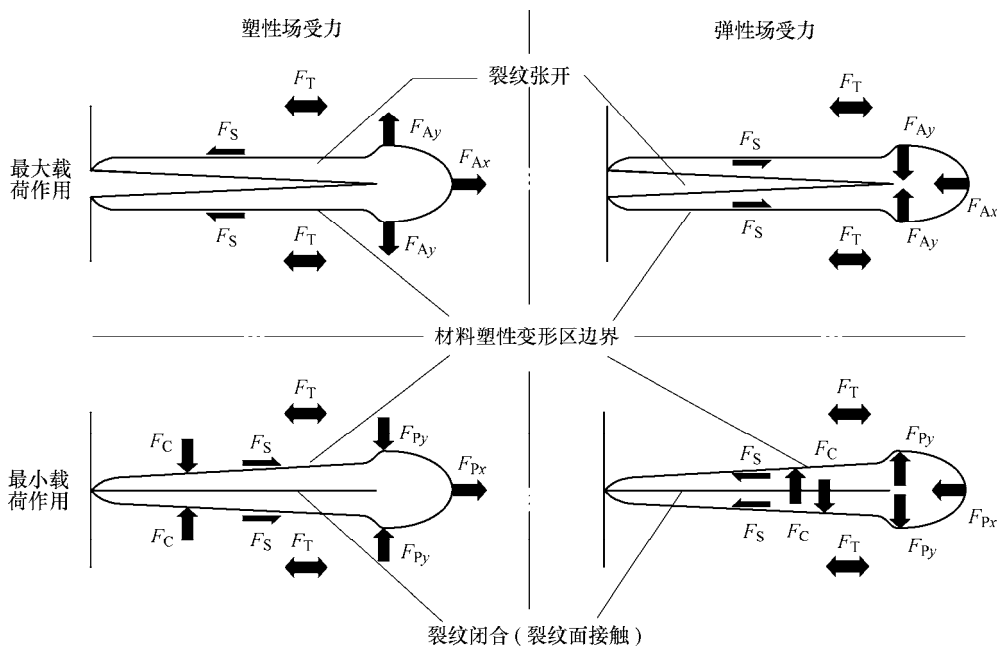


图 1 裂纹受力示意图

理想化的裂纹受力示意图。这些力包括：作用在裂尖塑性区与周围弹性场界面上的力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$ ，它们是远场载荷的反力；源于  $T$  应力的力  $F_T$ ；近裂尖弹—塑性区域边界因变形协调作用产生的力  $F_{Px}$  和  $F_{Py}$ ，因弹、塑性区泊松比存在差异，对裂纹而言，这些力在与裂纹垂直方向扩张，而在平行方向收缩；裂纹尾迹弹—塑性区域边界因变形协调作用产生的力  $F_S$ ；因裂纹面接触而传递至裂纹尾迹弹—塑性区域边界的力  $F_C$ 。

在 CJP 模型中，I 型加载条件下的裂尖应力场可表示为<sup>[13]</sup>

$$\sigma_x = -\frac{1}{2}(A+4B+8E)r^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}Br^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{5\theta}{2} - C - \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}}\left[\ln(r)\left(\cos\frac{5\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\right) + \theta\left(\sin\frac{5\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(A-4B-8E)r^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}Br^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{5\theta}{2} + \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}}\left[\ln(r)\left(\cos\frac{5\theta}{2} - 5\cos\frac{\theta}{2}\right) + \theta\left(\sin\frac{5\theta}{2} - 5\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left(A\sin\frac{\theta}{2} + B\sin\frac{5\theta}{2}\right) - Er^{-\frac{1}{2}}\sin\theta \times \left[\ln(r)\cos\frac{3\theta}{2} + \theta\sin\frac{3\theta}{2}\right] + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (3)$$

式中， $r$  为到裂尖的距离； $\theta$  为与裂纹面的极角； $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$  为定义裂尖应力场的 4 个待求参量。

相似地，裂尖位移场可表示为<sup>[18]</sup>

$$2\mu(u_x + iu_y) = k\left[-2(B+2E)z^{\frac{1}{2}} + 4Ez^{\frac{1}{2}} - 2Ez^{\frac{1}{2}}\ln(z) - \frac{C}{4}z\right] - z\left[-(B+2E)z^{\frac{1}{2}} - 4Ez^{\frac{1}{2}}\ln(z) - \frac{C}{4}\right] - \left[Az^{\frac{1}{2}} - Ez^{\frac{1}{2}}\ln(z) + 2Ez^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{4}z\right] \quad (4)$$

式中， $u_x$  和  $u_y$  分别为水平位移和垂向位移； $\mu$  为剪切模量，其值为  $E/[2(1+\nu)]$ ， $E$  和  $\nu$  分别为杨氏模量和泊松比；在平面应力条件下， $\kappa$  值为  $3-4\nu$ ，在平面应变条件下， $\kappa$  值为  $(3-\nu)/(3+\nu)$ 。

于是，可用如下新定义的应力强度因子来描述图 1 所示各力作用下的裂尖应力场，具体如下

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \left( \sigma_y + 2Er^{-\frac{1}{2}}\ln r \right) \right] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(A-3B-8E) \quad (5)$$

$$K_R = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_x \right] = -(2\pi)^{\frac{3}{2}} E \quad (6)$$

$$K_S = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy} \right] = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}(A+B) \quad (7)$$

$$T = -C \quad (8)$$

式中， $K_F$  为驱动裂纹扩展的张开型应力强度因子，当不存在塑性诱导屏蔽作用时，其值与传统 I 型裂纹扩展应力强度因子  $K_I$  相等； $K_R$  为反映受裂纹面接触(即裂纹闭合)影响而在裂尖及裂纹尾迹弹—塑性区域边界产生的阻滞应力强度因子； $K_S$  为因满足变形协调条件而沿弹—塑性区域边界产生的剪应力强度因子； $T$  为  $T$  应力。JAMES 等<sup>[18]</sup>的研究表明，CJP 模型在一定程度上揭示了如何用基于弹性场的参量(如应力强度因子)去准确描述因塑性变形而产生的疲劳裂纹扩展行为，有助于解决围绕塑性诱导屏蔽作用开展的那些研究引发的一系列争议。

## 2 试验材料与方法

试样取材于 1 mm 厚工业纯钛板材。为了研究试样几何变化对疲劳裂纹扩展率的影响，探索 CJP 模型在疲劳裂纹扩展行为描述方面的应用，利用激光切割加工图 2 所示 5 种不同试样半高  $h$  与宽度  $b$  之比( $h/b$ )的紧凑拉伸(CT)试样，可见每种试样可供裂纹扩展的韧带区尺寸存在差异。表 1 给出了疲劳裂纹扩展率试验的载荷、频率等条件。试验采用正弦波加载，应力比为 0.1，最大载荷为 700 N。材料力学性能和化学成分见表 2、3。

表 1 疲劳试验条件

编号	试样		加载条件			
	高宽比 $h/b$	类型	最大载荷 $P_{max}/N$	应力比 $R$	频率 $f/Hz$	波形
CT1	1.0	非标准 CT 试样				
CT2	0.8	非标准 CT 试样				
CT3	0.6	标准 CT 试样	700	0.1	10	正弦波
CT4	0.5	非标准 CT 试样				
CT5	0.4	非标准 CT 试样				

表 2 工业纯钛化学成分的质量分数 (%)

元素	Fe	C	N	O	H	Ti
含量	0.10	0.01	<0.01	0.12	0.002	>99.758

表 3 工业纯钛力学性能

弹性模量 $E/MPa$	抗拉强度 $\sigma_b/MPa$	屈服强度 $\sigma_s/MPa$	延伸率 $\delta(\%)$	泊松比 $\nu$
105 000	448	390	20	0.33

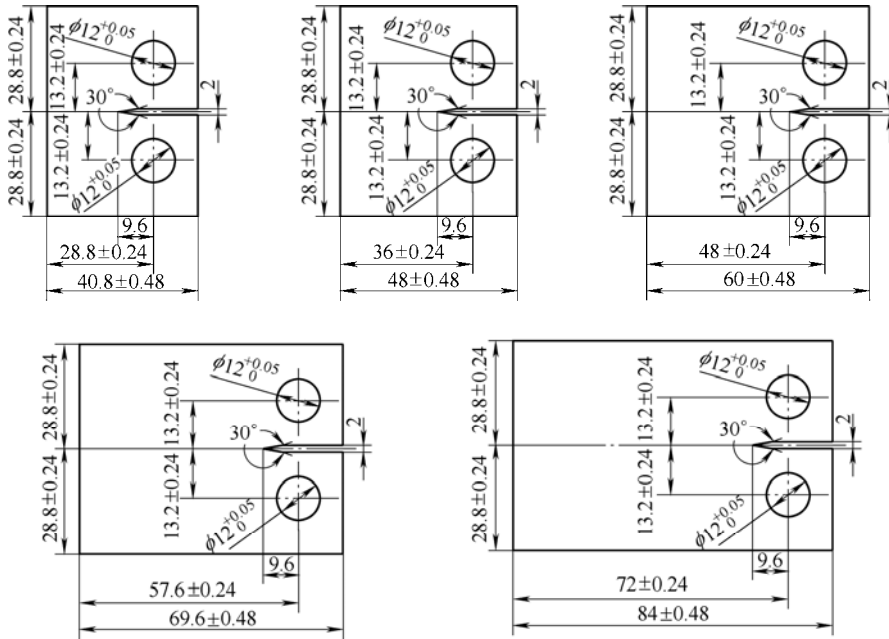


图2 试样外形和尺寸(mm)

为了便于开展 DIC 研究和进行裂纹长度测量，对 CT 试样的两个表面采用不同方法进行处理。用于 DIC 数据采集的表面在经过 2000 号水砂纸打磨后，还需进行散斑处理，即首先在试样表面均匀喷涂白色哑光底漆，待干燥后再喷涂随机分布的黑色斑点，形成便于数字图像相关性分析的表面散斑；另一表面则在完成水砂纸处理后，还需用金刚石悬浊液在抛光机上进行表面抛光，以便试验过程中使用精度为 10 μm 的移动显微镜观测裂尖位置，进而确定裂纹长度。

所有疲劳试验均在英国普利茅斯大学工程学院的 ElectroPuls E3000 动态试验机上完成。如图 3 所示，试验时将配有 10 倍微距变焦镜头(MLH-10×)的累积扫描单色摄像机垂直对准试样散斑表面，由 Dantec Q-400 3D 数字图像相关系统进行裂尖位移场捕捉，视场大小为 1 624 像素×1 202 像素。试验过程中，在一系列设定的疲劳循环数暂停试验，每次停机均利用 DIC 系统按低—高一低加载顺序，等间隔地完成一个完整载荷循环的图像捕捉，拍照对



图3 试验装置

应的载荷序列包含了最小载荷和最大载荷，以供 DIC 分析后进一步获取基于 CJP 模型的新应力强度因子范围(第 3.1 节)，拍照时用高强度 LED 灯照射试样表面以提供光源。试验暂停时，利用移动显微镜确定裂尖位置并读数，计算得到裂纹长度 *a*，同时记录该时刻经历的载荷循环次数 *N*。

### 3 结果与分析

#### 3.1 裂纹扩展驱动参量

##### 3.1.1 传统应力强度因子范围 Δ*K*

应力强度因子范围是常用的裂纹扩展驱动参量。图 4 给出了 CT 试样主要尺寸符号示意图<sup>[23]</sup>，对于试样 *h/b* 为 0.6 的标准 CT 试样，应力强度因子范围可表示为<sup>[22]</sup>

$$\Delta K = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{t\sqrt{b}} \times \frac{(2+a)}{(1-a)^{3/2}} \times 2 \times (0.886 + 4.64\alpha - 13.32\alpha^2 + 14.72\alpha^3 - 5.6\alpha^4) \quad (9)$$

式中，*P*<sub>max</sub>、*P*<sub>min</sub> 分别为最大、最小载荷；*t* 为试样厚度； $\alpha = a/b$ ，其中 *a* 为由两加载孔中心线开始测量的裂纹长度。

试验中，除使用 *h/b* 为 0.6 的标准 CT 试样外，还涉及 *h/b* 为 0.4、0.5、0.8、1.0 共 4 种非标准 CT 试样，随着 *h/b* 值的增大，试样初始剩余韧带长度减少。鉴于传统 IRWIN 应力强度因子对试样几何具有敏感性，因此需要对非标准 CT 试样的应力强度因子范围进行修正。TADA 等<sup>[23]</sup>编撰的裂纹应力分析手册提供了如下修正公式

$$\Delta K = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{t\sqrt{b}} \times \frac{(2+a)}{(1-a)^{3/2}} \times 2 \times F_2 \left( \frac{a}{b}, \frac{h}{b}, \frac{d}{h} \right) \quad (10)$$

式中,  $d$  为缺口表面至加载孔边缘的距离;  $F_2$  为与  $a/b$ 、 $h/b$ 、 $d/h$  相关的量纲一函数, 其值可由图 5<sup>[23]</sup> 获得。

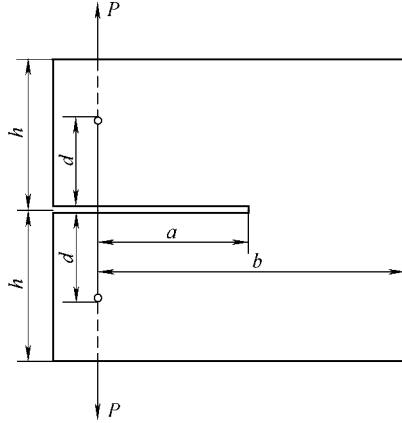


图 4 CT 试样

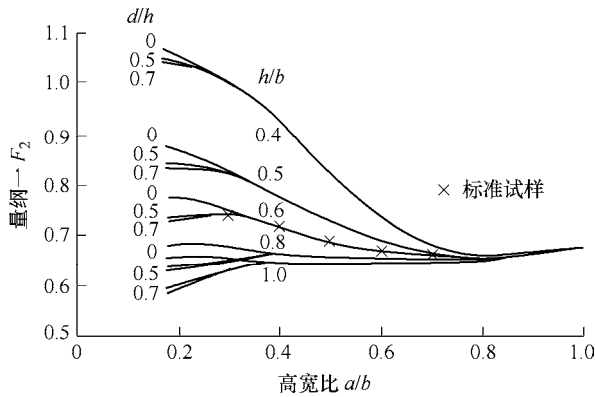


图 5  $F_2$  数值曲线

通过对图 5 进行数字化处理并用四次曲线拟合, 可得  $h/b$  为 0.4、0.5、0.6、0.8、1.0 的试样应力强度因子修正函数分别为

$$F_{2_{0.4}} = 0.755 + 3.23(a/b) - 11.61(a/b)^2 + 13.28(a/b)^3 - 4.98(a/b)^4 \quad (11)$$

$$F_{2_{0.5}} = 0.681 + 1.89(a/b) - 6.94(a/b)^2 + 8.27(a/b)^3 - 3.25(a/b)^4 \quad (12)$$

$$F_{2_{0.6}} = 0.443 + 2.32(a/b) - 6.66(a/b)^2 + 7.36(a/b)^3 - 2.80(a/b)^4 \quad (13)$$

$$F_{2_{0.8}} = 0.461 + 1.51(a/b) - 4.00(a/b)^2 + 4.30(a/b)^3 - 1.61(a/b)^4 \quad (14)$$

$$F_{2_{1.0}} = 0.353 + 2.00(a/b) - 4.84(a/b)^2 + 4.88(a/b)^3 - 1.73(a/b)^4 \quad (15)$$

需要说明的是, 试验使用的 CT 试样均取材于 1 mm 厚板材, 尽管该值小于标准建议的范围, 但试验结果表明裂纹扩展仍处于平面应变状态, 应力强度因子范围公式依然适用。

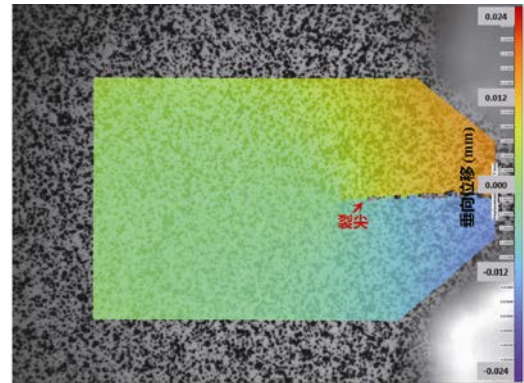
### 3.1.2 CJP 应力强度因子范围 $\Delta K_{CJP}$

考虑到 CJP 模型理论框架下的应力强度因子参量中,  $K_F$  为驱动裂纹扩展的张开型应力强度因子,  $K_R$  为阻碍裂纹扩展的阻滞应力强度因子, 二者差值提供了合理的裂纹扩展有效驱动力, 于是可定义基于 CJP 模型的新的应力强度因子范围

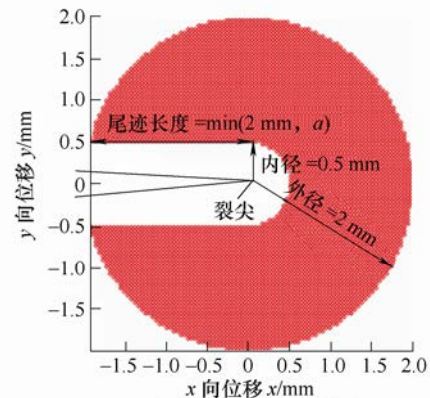
$$\Delta K_{CJP} = (K_{F,\max} - K_{R,\max}) - (K_{F,\min} - K_{R,\min}) = \Delta K_F - \Delta K_R \quad (16)$$

式中, 下标 max、min 分别表示最大、最小载荷作用时的状态。

CJP 模型认为裂尖及裂纹尾迹周围的塑性区能削弱驱动裂纹扩展的弹性应力场对裂纹的影响, 塑性诱导作用可通过考虑弹性场来评估。与 I 型裂纹 WILLIAMS 弹性裂尖应力场表达式<sup>[24]</sup>一样, CJP 模型的适用范围为近裂尖弹性场, 因此在利用 DIC 技术获取的裂尖位移场数据进行  $\Delta K_{CJP}$  求解时, 既要屏蔽塑性区的影响, 又要使参与计算的有效数据量相对稳定, 以确保计算结果的一致性。图 6a 为典型试样散斑表面上叠加的经 DIC 分析获得的位移场数



(a) 试样散斑表面与位移场



(b) 近裂尖分析区域的定义

图 6 典型位移场与近裂尖分析区域

据，而  $\Delta K_{CJP}$  求解使用的裂尖位移场分析区域如图 6b 所示，内径设置为 0.5 mm 以避免裂尖塑性区的影响，外径设置为 2 mm 以确保分析区域位于弹性场内。通过描绘垂向(加载轴向)位移场，寻找位移连续变化与突变分界点来确定裂尖位置。

### 3.2 裂纹扩展率曲线

#### 3.2.1 $da/dN-\Delta K$ 数据与 $da/dN-\Delta K_{CJP}$ 数据

用五点法<sup>[25]</sup>对试验获得的  $a-N$  数据进行处理，得到试样裂纹扩展率  $da/dN$ 。将试验中 5 个不同  $h/b$  值 CT 试样的  $da/dN-\Delta K$  和  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  数据分别绘制于图 7 所示双对数坐标中。由图 7a 可知，尽管各试样  $h/b$  值不同，但经式(10)修正后的  $da/dN-\Delta K$  数据呈窄带线性分布，具有良好的 consistency。修正后的数据有效消除了试样高宽比差异、剩余韧带大小不同引入的数据分散性。当以  $\Delta K_{CJP}$  为裂纹扩展驱动参量时，如图 7b 所示， $da/dN-\Delta K_{CJP}$  数据同样呈现强烈的窄带线性分布状态。值得强调的是，在以  $\Delta K_{CJP}$  为裂纹扩展驱动参量时， $da/dN-\Delta K_{CJP}$  数据无需经过修正，表现出对 CT 试样高宽比差异的不敏

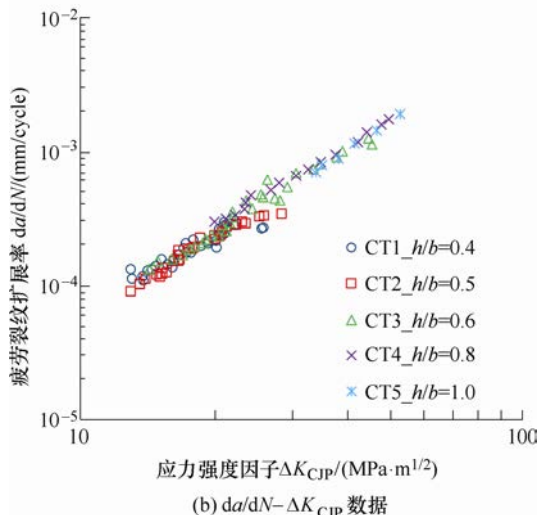
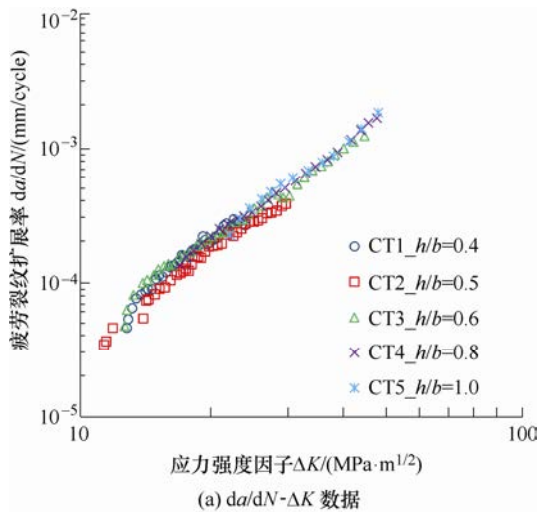


图 7 试验数据

感性。这是因为，CJP 模型理论框架下的裂纹扩展驱动参量  $\Delta K_{CJP}$  的获取，以近裂尖区域全场位移为数据基础，能直接反映裂纹扩展过程中裂尖的应力、应变和位移状态，避免了传统应力强度因子范围依赖试验载荷大小、试样尺寸等的不足。

#### 3.2.2 $da/dN-\Delta K$ 与 $da/dN-\Delta K_{CJP}$ 曲线

分别基于  $da/dN-\Delta K$  与  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  数据，可利用 Paris 公式<sup>[26]</sup>拟合得到二者对应的裂纹扩展率均值曲线如下

$$\lg\left(\frac{da}{dN}\right) = A' + B' \lg(\Delta K) \quad (17)$$

$$\lg\left(\frac{da}{dN}\right) = A' + B' \lg(\Delta K_{CJP}) \quad (18)$$

式中， $A'$  和  $B'$  为利用最小二乘法拟合试验数据得到的曲线常数，连同拟合线性相关系数  $r$  一起列于表 4。同时，将  $da/dN-\Delta K$  与  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  均值曲线及试验数据绘于图 8。

表 4 裂纹扩展率均值曲线参量

da/dN-ΔK 曲线			da/dN-ΔK <sub>CJP</sub> 曲线		
A'	B'	r	A'	B'	r
-6.901 5	2.462 1	0.987 0	-6.334 0	2.096 0	0.984 7

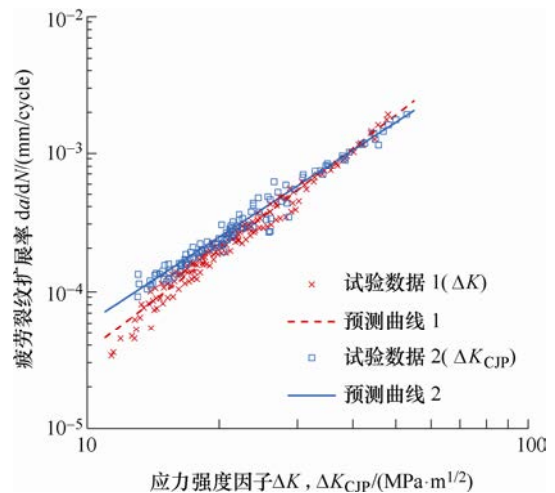


图 8 疲劳裂纹扩展率数据与预测曲线

结合图表可知，无论  $da/dN-\Delta K$  曲线还是  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  曲线，都有效反映了试验数据的分布规律，线性相关系数高，拟合效果好。可见， $\Delta K_{CJP}$  作为一种新的具有较明确物理意义的裂纹扩展驱动参量，利用它对疲劳裂纹扩展进行描述能得到很好的效果。整体来看，在中低扩展驱动参量范围内(当  $\Delta K$  和  $\Delta K_{CJP}$  低于  $40 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  时)，基于 CJP 模型理论框架的试验数据及扩展率曲线略高于传统试验数据及曲线，即在给定扩展驱动参量值的情况下，使用  $da/dN-\Delta K_{CJP}$  曲线将得到更高的扩展率；相反，在较高扩展驱动参量范围内(当  $\Delta K$  和  $\Delta K_{CJP}$  高于 40

MPa·m<sup>1/2</sup>时), 传统 da/dN-ΔK 曲线可能给出更高的扩展率预测结果。加之两种驱动参量获取手段并不相同, 故不能依据图 8 来判断哪种曲线更偏保守。

### 3.3 ΔK<sub>CJP</sub> 与 ΔK 关系的建立

如前所述, CJP 模型能反映近裂尖塑性区对疲劳裂纹扩展行为的影响, 能更好地描述塑性诱导屏蔽作用下的裂尖应力、应变和位移场。因此, 基于 CJP 模型的新应力强度因子范围 ΔK<sub>CJP</sub> 能直接且充分利用近裂尖位移场数据, 是更适合描述疲劳裂纹扩展行为的参量, 因此 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 曲线可望在材料与结构的失效分析与安全评价中发挥作用, 为剩余寿命预测和抗疲劳设计提供新的理论依据。

然而, 也正是因为 ΔK<sub>CJP</sub> 的获取依赖于近裂尖位移场, 使得如何在缺乏实时监测数据的情况下得到 ΔK<sub>CJP</sub> 值, 利用 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 曲线对裂纹扩展行为进行分析评估十分困难。一种可行的方案是通过分析判断 ΔK<sub>F</sub>、ΔK<sub>R</sub> 与 ΔK 之间的关系, 在 ΔK<sub>CJP</sub> 与 ΔK 之间构建某种关联函数, 从而通过目前更易于得到的传统裂纹扩展驱动参量推算基于 CJP 模型的裂纹扩展驱动力参量, 进而使用 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 曲线开展疲劳断裂分析。

图 9 给出了 ΔK<sub>F</sub>、ΔK<sub>R</sub> 随 ΔK 变化的情况, 不难看出, 对 ΔK<sub>F</sub> 和 ΔK 而言, 二次多项式较能反映数据间的总体变化趋势, 而线性方程则更适于表征 ΔK<sub>R</sub> 与 ΔK 之间的关联。因此, 分别选择这两种函数对图中数据进行拟合, 可得

$$\Delta K_F = 0.0255\Delta K^2 - 0.4046\Delta K + 17.34 \quad (19)$$

$$\Delta K_R = 0.1654\Delta K - 4.575 \quad (20)$$

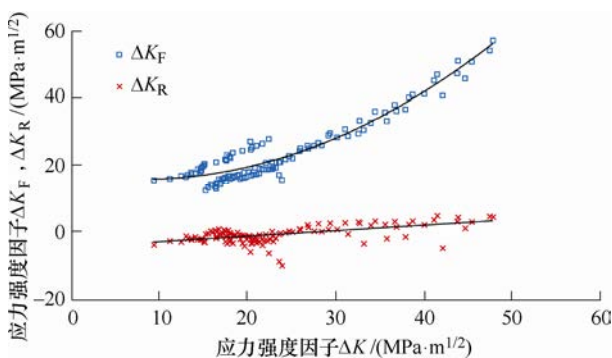


图 9 ΔK<sub>F</sub>、ΔK<sub>R</sub> 与 ΔK 之间的关系

将式(19)、(20)代入式(16), 可得 ΔK<sub>CJP</sub> 与 ΔK 之间的关联函数

$$\Delta K_{CJP} = 0.0255\Delta K^2 - 0.57\Delta K + 21.915 \quad (21)$$

图 10 为试验获得的 ΔK<sub>CJP</sub> 数据与 ΔK 数据, 同时给出了利用式(21)得到的两种裂纹扩展驱动参量关联曲线, 显然该曲线对试验数据有良好的拟合效

果。至此, 利用已建立的 ΔK<sub>CJP</sub> 与 ΔK 之间的关系, 可方便地使用式(18)所示 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 方程进行疲劳断裂相关分析。

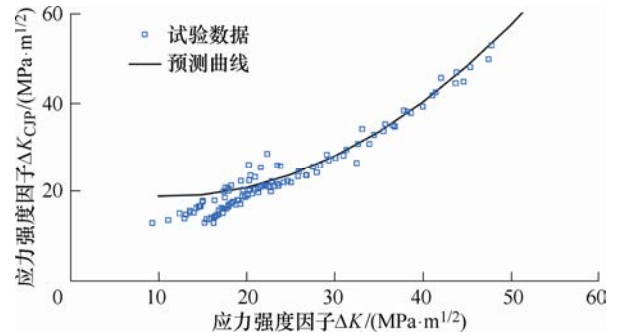


图 10 关联函数对 ΔK<sub>CJP</sub> 与 ΔK 关系的拟合效果

例如, 在本文试验条件下, 当给定裂纹长度  $a$  为 8.5 mm 时, 根据式(10)可分别计算得到 5 种  $h/b$  比值试样的 ΔK 数据, 利用关联函数式(21)即可获得相应的 ΔK<sub>CJP</sub> 数据, 进而可利用式(18)所示 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 方程预测裂纹扩展率。将以上过程的数据列入表 5, 同时为进行比较, 表中亦包含了利用式(17)传统 da/dN-ΔK 方程计算得到的扩展率。可见, 通过关联函数, 有效确定了 ΔK 数据与 ΔK<sub>CJP</sub> 数据间的量化关系, 实现了在已知传统裂纹扩展驱动参量情况下, 利用 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 方程进行裂纹扩展率预测。在该示例给定的裂纹长度下, 与用传统方程预测的结果进行比较, 新方程对不同  $h/b$  试样预测得到的扩展率整体偏高。

表 5 裂纹长度 8.5 mm 时的扩展驱动参量及扩展速率

试样编号	裂纹扩展驱动力		裂纹扩展率	
	ΔK / (MPa·m <sup>1/2</sup> ) 式(10)	ΔK <sub>CJP</sub> / (MPa·m <sup>1/2</sup> ) 式(21)	da/dN / (mm/cycle) 式(17)	da/dN / (mm/cycle) 式(18)
CT1	55.32	68.42	2.45×10 <sup>-3</sup>	3.25×10 <sup>-3</sup>
CT2	31.03	28.78	5.91×10 <sup>-4</sup>	5.30×10 <sup>-4</sup>
CT3	19.71	20.59	1.93×10 <sup>-4</sup>	2.63×10 <sup>-4</sup>
CT4	17.43	19.73	1.43×10 <sup>-4</sup>	2.40×10 <sup>-4</sup>
CT5	16.71	19.51	1.29×10 <sup>-4</sup>	2.35×10 <sup>-4</sup>

## 4 结论

(1) 基于 CJP 模型理论框架定义的新应力强度因子范围 ΔK<sub>CJP</sub> 直接由裂尖位移场求解, 可有效用于描述工业纯钛 5 种不同高宽比 CT 试样的裂纹扩展率曲线, 具有与试样高宽比无关的特性。

(2) 构建了 ΔK 数据和 ΔK<sub>CJP</sub> 数据间的关联函数, 实现了通过传统裂纹扩展驱动参量推算基于 CJP 模型的裂纹扩展驱动力参量, 进而使用 da/dN-ΔK<sub>CJP</sub> 曲



线进行扩展率预测, 拓宽了CJP模型在裂尖与裂纹尾迹塑性区描述之外的工程应用范围。

### 参 考 文 献

- [1] ELBER W. Fatigue crack closure under cyclic tension[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1970, 2(1): 37-45.
- [2] RANS C, ALDERLIESTEN R, BENEDICTUS R. Misinterpreting the results: How similitude can improve our understanding of fatigue delamination growth[J]. *Composites Science and Technology*, 2011, 71(2): 230-238.
- [3] RITCHIE R O, SURESH S. The fracture mechanics similitude concept: Questions concerning its application to the behaviour of short fatigue cracks[J]. *Materials Science and Engineering*, 1983, 57: 27-30.
- [4] JAMES M N. Some unresolved issues with fatigue crack closure-measurement, mechanism and interpretation problems[C]//*Proceeding of the 9th International Conference on Fracture*. Sydney: Pergamon Press, 1997, 2403-2414.
- [5] BUDIANSKY B, HUTCHINSON J W. Analysis of closure in fatigue crack growth[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, 45(2): 267-276.
- [6] GARZ R E, JAMES M N. Observations on evaluating fatigue crack closure from compliance traces[J]. *International Journal of Fatigue*, 1989, 11: 437-440.
- [7] JAMES M N, KNOTT J F. Critical aspects of the characterization of crack tip closure by compliance techniques[J]. *Materials Science and Engineering*, 1985, 72: 1-4.
- [8] BOWMAN R, ANTOLOVICH S D, BROWN R C. A demonstration of problems associated with crack closure measurement techniques[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1988, 31(4): 703-712.
- [9] JAMES M N, PACEY M N, WEI L W, et al. Characterisation of plasticity-induced closure-crack flank contact force versus plastic enclave[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70: 2473-2487.
- [10] PACEY M N, JAMES M N, PATTERSON E A. A new photoelastic model for studying fatigue crack closure[J]. *Experimental Mechanics*, 2005, 45(1): 42-52.
- [11] MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity[M]. 4th ed. Leyden: Noordhoff International, 1977.
- [12] SANFORD R J. A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems[J]. *Mechanics Research Communications*, 1979, 6(5): 289-294.
- [13] CHRISTOPHER C J, JAMES M N, PATTERSON E A, et al. Towards a new model of crack tip stress fields[J]. *International Journal of Fracture*, 2007, 148: 361-371.
- [14] CHRISTOPHER C J, JAMES M N, PATTERSON E A, et al. A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75: 4190-4199.
- [15] 杜泓飞, 曾攀, 雷丽萍, 等. 研究 NiTi 合金相变局部化现象的宏观原位多场测试方法及分析[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(24): 15-23.  
DU Hongfei, ZENG Pan, LEI Liping, et al. Experimental design and analysis for in situ macroscopic multi-fields measurements on transformation localization in NiTi alloy[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(24): 15-23.
- [16] 何文斌, 曾攀, 赵加清, 等. 重型液压机机架变形的数字图像相关测量与降温法有限元模拟[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(18): 34-41.  
HE Wenbin, ZENG Pan, ZHAO Jiaqing, et al. Deformation measurement based on digital image correlation and finite element analysis based on cooling method of heavy hydraulic press frame[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(18): 34-41.
- [17] McNEILL S R, PETER W H, SUTTON M A. Estimation of stress intensity factor by digital image correlation[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, 28(1): 101-112.
- [18] JAMES M N, CHRISTOPHER C J, LU Y, et al. Local crack plasticity and its influences on the global elastic stress field[J]. *International Journal of Fatigue*, 2013, 46: 4-15.
- [19] CHRISTOPHER C J, LABOVICIUTE G, JAMES M N, et al. Extension of the CJP model to mixed mode I and mode II[J]. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2013, 25: 161-166.
- [20] LABOVICIUTE G, CHRISTOPHER C J, JAMES M N. Growth of inclined fatigue cracks using the biaxial CJP model[J]. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2015, 33: 167-173.
- [21] VASCO-OLMO J M, JAMES M N, CHRISTOPHER C J, et al. Assessment of crack tip plastic zone size and shape and its influence on crack tip shielding[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2016, 39: 969-981.
- [22] SRAWLEY J E. Wide-range stress intensity factor expressions for ASTM E399 standard fracture toughness specimens[J]. *International Journal of Fracture*, 1976, 12: 475-480.
- [23] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The stress analysis of cracks handbook[M]. New York: ASM International, 2000.

- [24] WILLIAMS M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, 24: 109-114.
- [25] 刘建涛, 杜平安. 考虑过载效应的金属材料疲劳裂纹扩展试验数据拟合及疲劳裂纹扩展速度计算方法研究[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(4): 85-91.
- LIU Jiantao, DU Pingan. Research on the curve fitting of fatigue test data and computation of fatigue crack growth rates of metals in consideration of the retardation effect[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(4): 85-91.
- [26] PARIS P, ERDOGAN F. A critical analysis of crack propagation laws[J]. *Journal of Basic Engineering*, 1963, 85: 528-534.

---

作者简介: 杨冰, 男, 1979 年出生, 博士, 副研究员, 博士研究生导师。主要研究方向为结构强度理论与可靠性、材料疲劳与断裂。  
E-mail: yb@swjtu.cn