

1983-01-01

DYNAMICS OF A SLOWLY MOVING FRONT IN A SHALLOW WATER BODY.

Shapiro, Georgy

<http://hdl.handle.net/10026.1/11955>

Water Resources

All content in PEARL is protected by copyright law. Author manuscripts are made available in accordance with publisher policies. Please cite only the published version using the details provided on the item record or document. In the absence of an open licence (e.g. Creative Commons), permissions for further reuse of content should be sought from the publisher or author.

УДК 551.482.215

О ДИНАМИКЕ МЕДЛЕННО ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА В МЕЛКОМ ВОДОЕМЕ

ШАПИРО Г. И.

В статье рассматривается движение фронтов, которые возникают при взаимодействии различающихся по плотности водных масс. Примерами могут служить распространение легкой пресной воды по поверхности более тяжелой соленой в прибрежных районах морей; ситуации, возникающие при сбросе теплых вод промышленными предприятиями и электростанциями, проникновение морской воды в виде «соленого клина» в эстуарии рек и др. [3, 6, 10, 13, 17, 19, 20]. Во многих случаях изменения плотности сосредоточены в тонком слое [6, 8, 10], который при теоретическом анализе удобно рассматривать как бесконечно тонкую фронтальную поверхность. Там, где она пересекается со свободной поверхностью жидкости или достигает дна, возникает поверхностный или соответственно придонный фронт.

В эволюции фронта можно выделить три стадии: его возникновение, движение сформировавшегося фронта и его распад [10]. Мы будем рассматривать только вторую стадию. Оценки [19] показывают, что типичное время жизни мелкомасштабных фронтов может составлять от нескольких часов до многих недель.

Теоретические модели движений в стратифицированной жидкости, используемые при изучении динамики фронтов, можно подразделить на интегральные и дифференциальные [20]. В интегральных моделях относительное распределение величин скорости, температуры и т. д. по вертикали (и если необходимо, по одному из горизонтальных направлений) считается заранее известным [3, 13, 15]. Неизвестными считаются лишь параметры этих распределений, для них и составляются уравнения. При таком подходе предполагается автомодельность распределений, т. е. определенного рода устойчивость происходящих процессов. Интегральные модели, как правило, проще дифференциальных. Недостатком их является то, что в рамках этих моделей невозможно проверить, имеется ли в действительности предполагаемая автомодельность. В более сложных случаях (наличие ветра, отсутствие геометрической симметрии и т. д.) трудно ожидать автомодельности профилей величин скорости, температуры и т. д. и необходимо пользоваться дифференциальными моделями, где эти профили не предполагаются заранее известными, а находятся из решения задачи [12, 19, 20].

В аналитических моделях часто используют приближение двуслойно-стратифицированной жидкости, которое оказывается весьма удобным и эффективным при решении большого числа задач [11]. Двуслойное приближение используется весьма широко — от теории мелкомасштабных внутренних волн [9] до теории крупномасштабных океанских течений [11], но лишь небольшое число моделей предусматривает выход границы раздела жидкостей на свободную поверхность или пересечение с дном водоема, т. е. собственно образование фронта. Обусловлено это тем, что когда граница раздела жидкостей слабо отклоняется от своего равновесного положения, для описания этих отклонений можно пользоваться линеаризованными уравнениями. Когда эти отклонения настолько велики, что возникает фронт, задача становится существенно нелинейной.

Среди исследований, посвященных динамике фронта, следует отметить численные эксперименты [14, 17], а также работу [1], где анали-

тически получено решение задачи о неподвижном крупномасштабном фронте в восточной части экваториальной зоны океана.

Почти во всех рассмотренных работах фронт считался стационарным. Поскольку часто заранее неизвестно, как будет двигаться фронт, представляет интерес разработка нестационарной теории, которая должна ответить на вопросы о скорости движения фронта, форме фронтальной поверхности и характере циркуляции жидкости во фронтальной зоне.

В случае медленно движущегося приповерхностного фронта в глубоком водоеме такая теория, учитывающая роль сил трения, была предложена в работе [12]. Для далеких от критического режима течений вязкой жидкости уравнения движения были сведены к одному нелинейному уравнению, причем некоторые его решения удалось найти аналитически. Предложенные в [12] упрощения основаны на том, что все

движения сосредоточены вблизи верхнего слоя, а придонными эффектами можно пренебречь. В настоящей работе метод, использованный в [12], применяется к более сложному случаю неглубокого водоема, когда толщина верхнего и нижнего слоев могут быть сравнимы, а придонные и приповерхностные движения жидкости тесно связаны друг с другом.

Рассмотрим медленные движения вязкой двуслойно-страти-

фицированной жидкости в неглубоком водоеме, глубина которого значительно меньше экмановского слоя трения (рис. 1). Для простоты будем считать дно плоским и горизонтальным.

Выведем уравнение, описывающее изменения во времени формы и пространственного положения фронтальной поверхности $Z = h_2(x, y, t)$, отделяющей легкую жидкость с плотностью ρ от более тяжелой с плотностью $\rho_2 = \rho(1 + \delta)$, где δ — относительный перепад плотности.

Сформулируем основные допущения, которые будут использованы при выводе уравнений. Касательное напряжение ветра $T(x, y, t)$ считаем известной функцией горизонтальных координат x, y и времени t . Наклон фронтальной поверхности $\alpha = H/L$ (и тем более уклон свободной поверхности) считаем малым, (H — характерная глубина водоема, L — характерный горизонтальный размер). Условие $\alpha \ll 1$ практически всегда выполняется, так как в реальных фронтах α составляет $10^{-4} \div 10^{-2} \ll 1$ [10]. Полагаем далее, что плотностное число Фруда

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{\delta g H}} \ll 1,$$

где u — характерная скорость движения жидкости.

В [12] показано, что условие $Fr^2 \ll 1$ является количественным критерием «медленности» движения. Это условие выполняется не всегда и требует проверки в каждом конкретном случае. Например при $\delta = 0,01$, $H = 10$ м условие $Fr^2 \ll 1$ выполняется при $u = 0,1$ м/с, но не выполняется при $u = 1$ м/с. В лабораторных опытах [8] по растеканию струи более легкой жидкости в широком водоеме типичное значение Fr^2 равнялось 0,04, в опытах [4] с осесимметричной интрузией Fr^2 не превышало 0,05.

Коэффициент турбулентной вязкости ν считаем известным и для простоты постоянным по глубине. Обобщение на случай различных значений ν в верхнем и нижнем слоях не вызывает затруднений. Величину ν можно рассчитать, пользуясь известными эмпирическими зависимостями, например, формулой Неймана-Пирсона [7]. Горизонтальным придонным трением пренебрегаем.

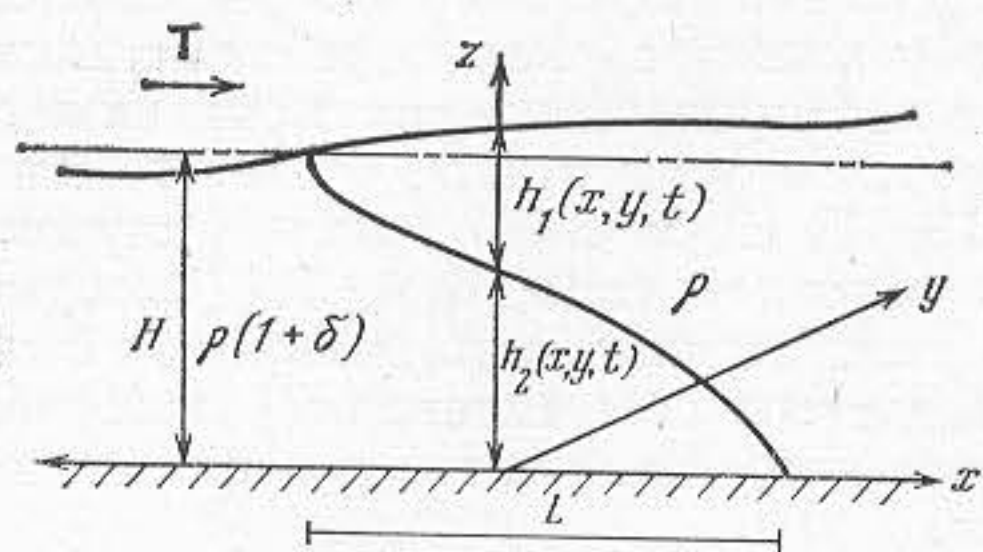


Рис. 1. Схематический разрез фронтальной зоны

В указанных приближениях давление можно рассчитать по закону гидростатики, а в уравнениях горизонтального движения можно оставить только два члена, выражающие баланс градиента гидростатического давления и сил турбулентной вязкости:

$$-\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial U_i}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где индекс $i=1$ относится к верхней жидкости, $i=2$ — к нижней; $\rho_1 = \rho$; $\rho_2 = \rho(1+\delta)$; p_i — давление; $\mathbf{U} = (u_x, u_y)$ — двумерный вектор горизонтальной составляющей скорости с компонентами u_x, u_y ; ∇ — горизонтальный оператор градиента.

Подставив выражения для p_1, p_2 в виде

$$p_1 = \rho_1 g (h_1 + h_2 - z), \quad (2)$$

$$p_2 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 - z) \quad (3)$$

в уравнения (1) и обозначив $\nu(1+\delta) = \nu_*$, получим

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{g}{\nu} (\nabla h_1 + \nabla h_2); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \frac{g}{\nu_*} (\nabla h_1 + (1+\delta) \nabla h_2). \quad (5)$$

Для рассматриваемых медленных движений граничные условия по вертикали примем в виде, который часто используют для расчета морских течений [1, 11], на дне — прилипание, на фронтальной поверхности — непрерывность скоростей и касательных напряжений, на свободной поверхности — непрерывность касательного напряжения трения:

$$U_2 = 0 \text{ при } z = 0; \quad (6)$$

$$U_1 = U_2, \quad \nu \frac{\partial U_1}{\partial z} = \nu_* \frac{\partial U_2}{\partial z} \text{ при } z = h_2(x, y, t); \quad (7)$$

$$\rho \nu \frac{\partial U_1}{\partial z} = T \text{ при } z = h_1 + h_2. \quad (8)$$

Граничные условия (7) соответствуют выводу о квазиламинарном характере касательных напряжений вблизи границы раздела, сделанному в работе [6] на основе лабораторных экспериментов.

Уравнения неразрывности для каждого слоя жидкости удобно записать в интегральной форме:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \nabla I_i = 0, \quad (9)$$

где полные потоки I_i определяются формулами

$$I_1 = \int_{h_2}^{h_1+h_2} U_1 dz; \quad (10)$$

$$I_2 = \int_{\nu}^{h_2} U_2 dz. \quad (11)$$

В отличие от уравнений баланса импульса, в уравнениях (9) нельзя пренебрегать нестационарным членом, так как он может быть того же порядка, что и остальные члены в этих уравнениях. Физически это означает, что время, необходимое для установления квазистационарного баланса импульса, согласно уравнениям (1), намного меньше, чем время, необходимое для существенного изменения формы или местоположения фронтальной поверхности, причем при оговоренных выше предположениях такое соотношение времен выполняется автоматически [12]. Преимущество рассматриваемого подхода состоит в том, что он обеспе-

чивает фильтрацию быстрых движений, например, внутренних и поверхностных волн, поскольку нестационарные члены в уравнениях импульса, соответствующие этим движениям, отсутствуют.

Разрешим уравнения (4), (5) относительно U_1 , U_2 с учетом граничных условий (6)—(8):

$$U_1(x, y, z, t) = \frac{g}{2v} z^2 (\nabla h_1 + \nabla h_2) + z \left[\tau - \frac{g}{v} (h_1 + h_2) (\nabla h_1 + \nabla h_2) \right] - \\ - \frac{gh_2}{2v_*} [(2h_1 + h_2) (\nabla h_1 + \nabla h_2) + \delta h_2 \nabla h_2] + \tau h_2 (\mu - 1) + \\ + \frac{g}{2v} h_2 (2h_1 + h_2) (\nabla h_1 + \nabla h_2); \quad (12)$$

$$U_2(x, y, z, t) = \frac{g}{2v_*} z^2 [\nabla h_1 + \nabla h_2 (1 + \delta)] + \\ + z \left\{ \mu \tau - \frac{g}{v_*} [(h_1 + h_2) (\nabla h_1 + \nabla h_2) + \delta h_2 \nabla h_2] \right\}, \quad (13)$$

где

$$\tau \equiv \frac{T}{\rho v}; \quad \mu \equiv \frac{v}{v_*} = \frac{1}{1 + \delta}. \quad (14)$$

Для упрощения записи формул удобно перейти к безразмерным переменным. Пусть τ_0 — характерное значение τ (при отсутствии ветра в качестве τ_0 можно брать любую величину, так как на окончательном результате это не скажется). Безразмерные значения толщин слоев ξ_1 и ξ_2 , вертикальной координаты z_0 , горизонтальных координат x_0 , y_0 , скоростей U_{10} , U_{20} , времени t_0 , потоков I_{10} , I_{20} , касательного напряжения ветра τ_0 определим формулами

$$h_i = H \xi_i; \quad z = H z_0; \quad x = L x_0; \quad y = L y_0; \\ I_i = \frac{\tau_0 H^2}{4} I_{i0}; \quad t = t_0 t_0; \quad \tau = \tau_0 \tau_0; \\ U_i = \frac{\tau_0 H}{4} U_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

где введены следующие характерные масштабы

$$L = \frac{\delta g H^2}{3 \tau_0 v}; \quad t_0 = \frac{4 \delta g H}{3 \tau_0^2 v}. \quad (16)$$

Записав выражения (12), (13) в безразмерном виде согласно (15), (16) и подставив эти выражения в формулы (10), (11), получим

$$I_1 = - \frac{2 \xi_1}{\delta} \{ \nabla \xi_1 [2 \xi_1^2 + 3 \mu \xi_2 (2 \xi_1 + \xi_2) + \\ + \nabla \xi_2 [2 \xi_1^2 + 3 \mu \xi_2 (2 \xi_1 + (1 + \delta) \xi_2)] - \delta \tau (\xi_1 + 2 \mu \xi_2) \}; \quad (17)$$

$$I_2 = - \frac{2 \mu \xi_2^2}{\delta} \{ \nabla \xi_1 (3 \xi_1 + 2 \xi_2) + \nabla \xi_2 [3 \xi_1 + 2 (1 + \delta) \xi_2] - \tau \delta \}. \quad (18)$$

Для краткости здесь и ниже мы опускаем индекс «0», обозначающий безразмерные переменные, поскольку в формулах, где фигурируют ξ_1 , ξ_2 все переменные безразмерные.

В этих переменных уравнения (9) приобретают вид

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \nabla I_1 = 0; \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \nabla I_2 = 0. \quad (19)$$

Выражения I_1 , I_2 через ξ_1 , ξ_2 известны из (17) и (18), поэтому уравнения (19) представляют собой замкнутую систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно двух неизвестных функций: ξ_1 и ξ_2 . В общем случае решить эту систему аналитически, по-видимому, невозможно.

Задача существенно упрощается, если уровень свободной поверхности мало меняется во времени, например, амплитуда прилива в устье реки мала по сравнению с ее глубиной. Тогда, сложив уравнения (19) и пренебрегая изменениями уровня, т. е. положив

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi_1 + \xi_2) = 0,$$

получаем

$$\nabla (I_1 + I_2) = 0.$$

Ясно, что любая функция времени

$$I_1 + I_2 = I_0(t) \quad (20)$$

удовлетворяет этому уравнению. Кроме того, отсюда следует, что величина $\xi_1 + \xi_2 = H_0(x, y)$ не зависит от времени.

Эти соотношения позволяют исключить из системы (19) одну из переменных, например, ξ_2 и свести задачу к решению одного уравнения относительно одной неизвестной функции. Для определения $\nabla \xi_2$ воспользуемся формулой (20) и с учетом выражений (17), (18) получим

$$\nabla \xi_2 = - \frac{\frac{\delta I_0}{2} + 2A \nabla \xi_1 - \delta \tau D}{2(A + \delta \mu B)}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \xi_1^3 + 3\mu \xi_1^2 \xi_2 + 3\mu \xi_1 \xi_2^2 + \mu \xi_2^3; \\ B &= \xi_2^2 \left(\frac{3}{2} \xi_1 + \xi_2 \right); \\ D &= \xi_1^2 + 2\mu \xi_1 \xi_2 + \mu \xi_2^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим далее выражения (21), (22) в формулу (17) и вспомним, что уклон свободной поверхности мал, а дно горизонтально. Тогда приближенно можно считать

$$\xi_1 + \xi_2 = H_0(x, y) \approx H_0 = \text{const.} \quad (23)$$

Соответствующим выбором масштаба глубины в формулах (15), (16) всегда можно получить $H_0 = 1$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Исключив ξ_2 при помощи соотношения (23) из преобразованного выражения (17), получим новое выражение потока I_1 как функцию величин ξ_1 , $\nabla \xi_1$, I_0 и параметров μ и δ . Заметим, что выражением (23) можно пользоваться для исключения ξ_2 только там, где ξ_2 не входит под знак оператора ∇ .

Получающееся новое выражение для I_1 в общем виде очень громоздко. Упростить его можно, разложив по малому перепаду плотности δ и оставив только нулевой, не содержащий δ член, при этом $\mu = 1$.

В этих приближениях выражение для I_1 принимает вид ($\xi_1 \equiv \xi$)

$$I_1 = -\xi \left\{ \xi (1 - \xi)^3 (3 + \xi) \nabla \xi - \frac{I_0}{2} (3 - \xi^2) - \tau (1 - \xi)^2 \right\}. \quad (24)$$

Подставив выражение (24) в первое из уравнений (19), получим основное уравнение для толщины верхнего слоя ξ , описывающее динамику фронтальной поверхности:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \left\{ \xi \left[\xi (1 - \xi)^3 (3 + \xi) \nabla \xi - \frac{I_0}{2} (3 - \xi^2) - \tau (1 - \xi)^2 \right] \right\}. \quad (25)$$

После того, как из уравнения (25) получена функция $\xi(x, y, t)$, толщина слоя нижней жидкости ξ_2 находится из соотношения (23), $\nabla \xi_2$ — по (21), а поле горизонтальной составляющей скорости — по (12), (13). Вертикальную компоненту скорости можно найти из уравнения неразрывности.

Рассмотрим теперь случай, когда верхний слой жидкости существенно тоньше, чем нижний, т. е. $\xi \ll 1$, а касательное напряжение ветра T не изменяется в пространстве. Тогда (25) можно записать в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{3}{2} I_0(t) + \tau(t) \right) \nabla \xi = \nabla (3\xi^2 \nabla \xi). \quad (26)$$

Это уравнение напоминает уравнение, полученное в [12] для случая глубокого водоема, и отличается от последнего тем, что содержит более низкие степени ξ в членах с пространственными производными. В частности, второй член в левой части (26), выражающий движение фронтальной поверхности без изменения ее формы ветром и полным потоком, линейен по ξ . Изменения формы фронтальной поверхности описываются правой частью уравнения (26). Для дальнейших расчетов перейдем в движущуюся систему координат по формуле

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \int_0^t \left[\frac{3}{2} I_0(t) + \tau(t) \right] dt. \quad (27)$$

Тогда (26) превратится в уравнение нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla' (3\xi^2 \nabla' \xi), \quad (28)$$

где ∇' — оператор градиента в движущейся системе координат. Автомодельные решения таких уравнений хорошо известны [2]. Рассмотрим несколько примеров.

I. Пусть слой верхней жидкости представляет собой тонкое осесимметричное пятно постоянного объема V (рис. 2). Тогда автомодельное решение уравнения (28) имеет вид

$$\xi(r', t) = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} t^{-1/3} f \left(\frac{r'}{t^{1/3} \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}} \right), \quad (29)$$

причем функцию f можно найти известным способом [2]. Как следует из (29), радиус такого расплывающегося пятна растет по закону, который в размерных переменных имеет вид

$$R(t) = \alpha_1 \left(\frac{\tau_0^2 \nu t}{\delta g H} \right)^{1/3} \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} = \alpha_1 t^{1/6} V^{1/3} \left(\frac{\delta g H}{\nu} \right)^{1/6} \quad (30)$$

где α_1 — универсальная константа порядка единицы.

II. Верхняя жидкость представляет собой двумерный ($\partial/\partial y = 0$) «язык» (рис. 3), толщина которого ξ_∞ вдали от фронта известна и постоянна. Если перемещение этого «языка» за счет переносного движения не слишком велико, так что граничное условие в течение всего времени можно считать заданным при $x' = -\infty$, то автомодельное решение уравнения (28) имеет вид, аналогичный (29):

$$\xi(x', t) = \xi_\infty \varphi \left(\frac{x'}{\xi_\infty V t} \right). \quad (31)$$

Соответствующая этому решению зависимость горизонтальной координаты фронта от времени, записанная в исходной системе координат в размерных переменных, имеет вид

$$x_{\text{фр}}(t) = \alpha_2 h_\infty \sqrt{\frac{\delta g H t}{\nu}} + \int_0^t \left(\frac{I_0(t)}{2H} + \frac{HT(t)}{12\rho\nu} \right) dt, \quad (32)$$

где $h_\infty = \xi_\infty H$; α_2 — константа, аналогичная α_1 .

III. В случае, когда переносного движения нет, например, при $I_0 = 0$, $\tau = 0$, можно найти еще несколько реалистических решений уравнения

а x_1 — координата поверхностного фронта при $t=0$. Интеграл в правой части (35) выражается через элементарные функции.

Поскольку фронтальная поверхность доходит до дна, то при $\xi=1$ поток нижней жидкости I_2 обращается в нуль, т. е. $I_1=I_0$. Это граничное условие позволяет определить скорость движения фронта

$$C = I_0, \quad (37)$$

или в размерных переменных $C=I_0/H$.

Найденное решение существует не всегда, а лишь при таких значениях I_0 , τ , когда интеграл в формуле (35) не обращается в бесконечность при $0 \leq \xi \leq 1$, а запрещенная область определяется условием

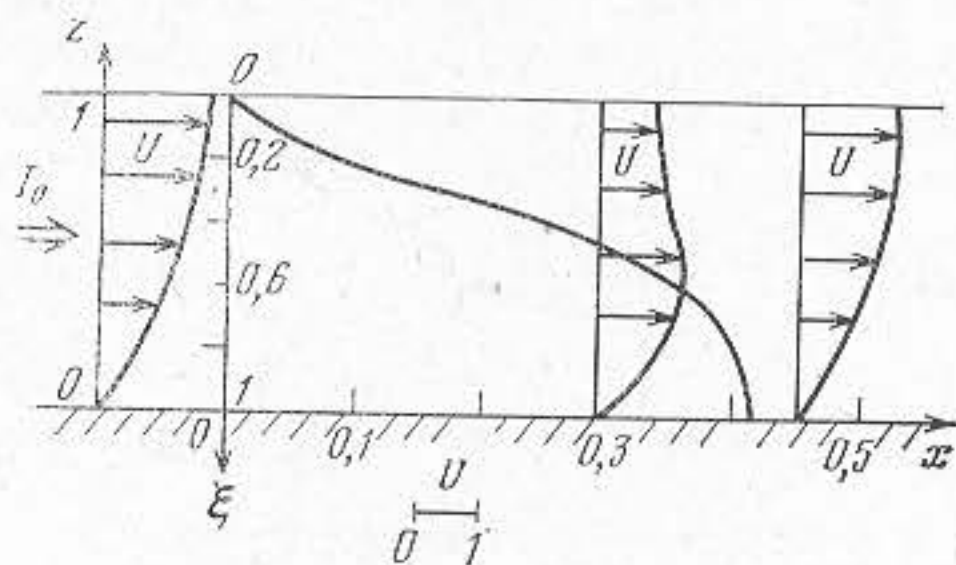


Рис. 4

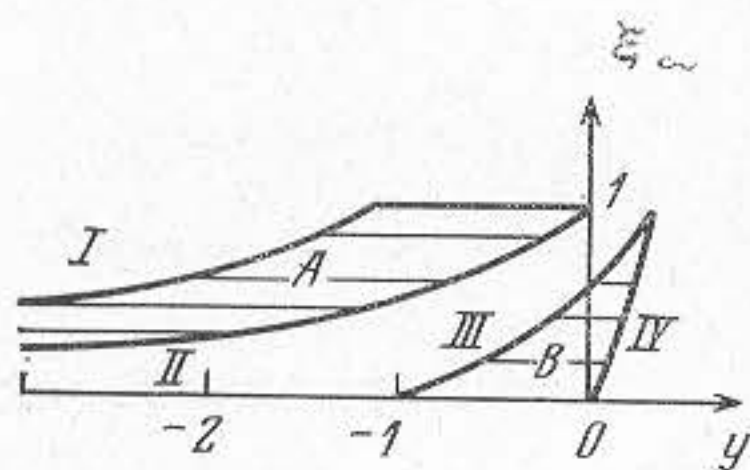


Рис. 6

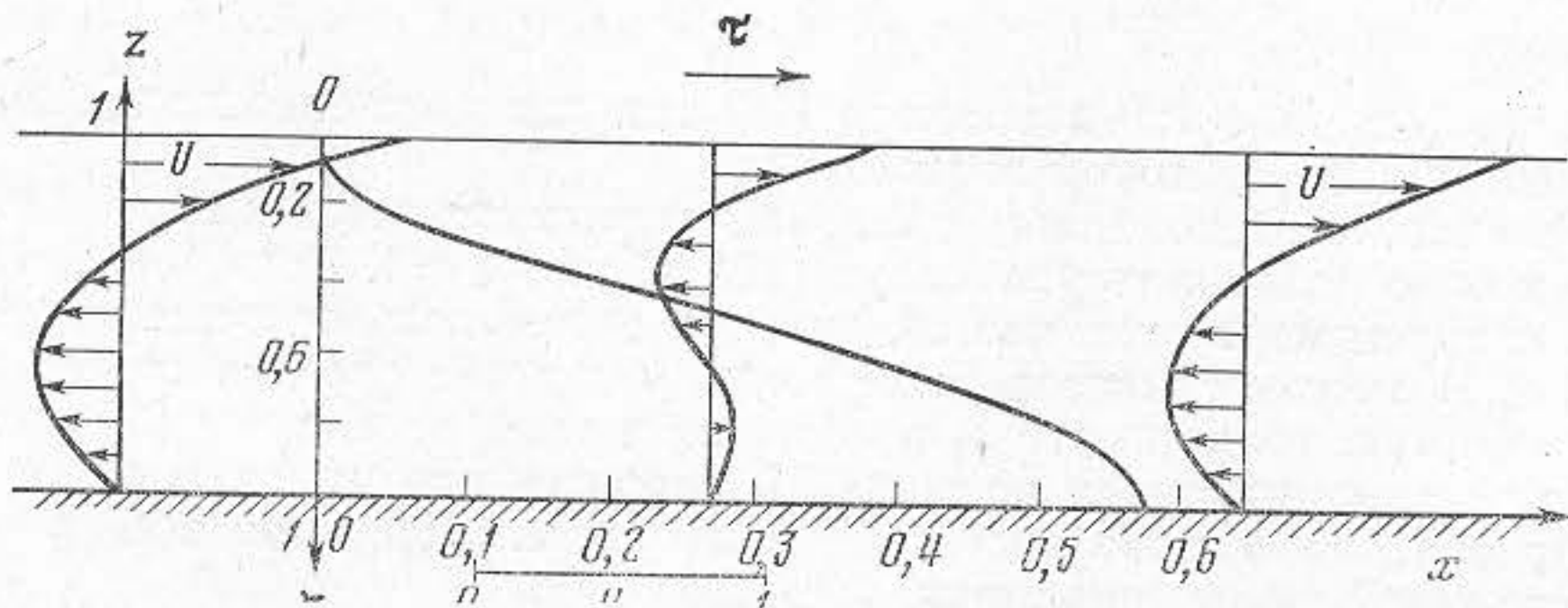


Рис. 5

Рис. 4. Вертикальный разрез фронтальной поверхности и профили скорости для случая движущегося стационарного фронта при $I_0=1$, $\tau=0$, $C=1$ (рассчитано по формулам (38), (12), (13))

Рис. 5. То же, что на рис. 4 для фронта в замкнутом канале при $I_0=0$, $C=0$, $\tau=1$ (рассчитано по формулам (39), (12), (13))

Рис. 6. Области «запрещенных» значений ξ_∞ , $\psi=I_0/2\tau$, при которых не существуют стационарные решения для поверхностного (A) и придонного (B) фронтов
 $I - \xi_\infty = 2/(1-\psi)$, $II - \xi_\infty = 1/(1-\psi)$, $III - \xi_\infty = (1+\psi)/[2(1-\psi)]$, $IV - \xi_\infty = 2\psi/(1-\psi)$

$-1 < I_0/2\tau < 0$ при $\tau \neq 0$; при $\tau=0$ (в отсутствие ветра) искомое решение существует при любом $I_0 \neq 0$. Приведем в качестве примеров форму фронтальной поверхности, рассчитанную по формуле (35) при $\tau=0$, $I_0 \neq 0$ (рис. 4):

$$x(\xi) = \frac{2}{I_0} \left(\frac{\xi^4}{4} - \frac{5}{2} \xi^2 + 8\xi - 8 \ln(1+\xi) \right) + x_1 + I_0 t. \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (38)$$

и при $\tau \neq 0$, $I_0=0$ (фронт неподвижен) (рис. 5):

$$x(\xi) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{3}{2} \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^3 - \frac{\xi^4}{4} \right) + x_1, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (39)$$

Длину «плотностного клина», т. е. расстояние по горизонтали между поверхностным ($\xi=0$) и придонным ($\xi=1$) фронтами получаем для

(26). Пусть вдали от фронта (при $x = -\infty$) задан постоянный поток $I_{1\infty}$ в тонком двумерном «языке» легкой жидкости (рис. 3). Тогда в автомодельном режиме движение фронта описывается формулой

$$x_{\text{фр}}(t) = \alpha_3 \left(\frac{\delta g H}{\nu} \right)^{1/4} I_{1\infty}^{1/2} t^{3/4}. \quad (33)$$

Во всех рассмотренных примерах скорость движения фронта (за вычетом скорости переносного движения) уменьшается во времени, так как слой легкой жидкости расширяется и уклон фронтальной поверхности уменьшается. Правда, иногда скорость фронта уменьшается очень

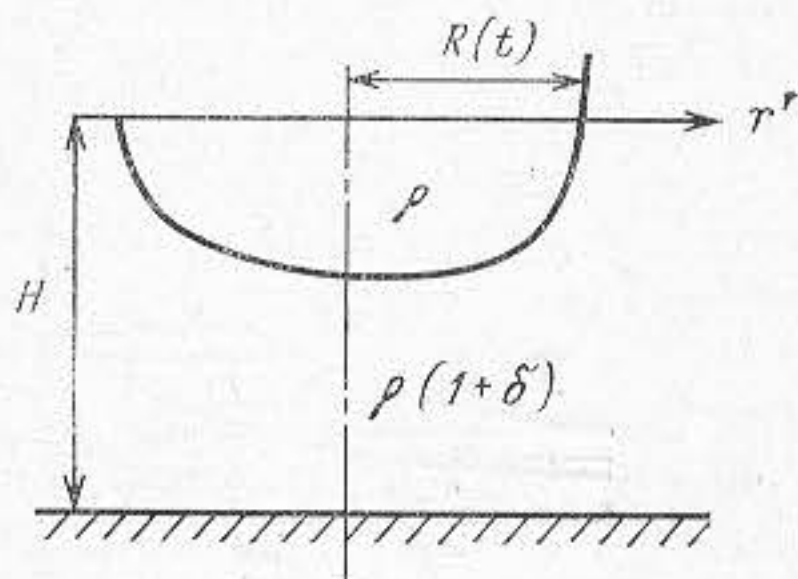


Рис. 2. Расплывание тонкого осесимметричного пятна легкой жидкости

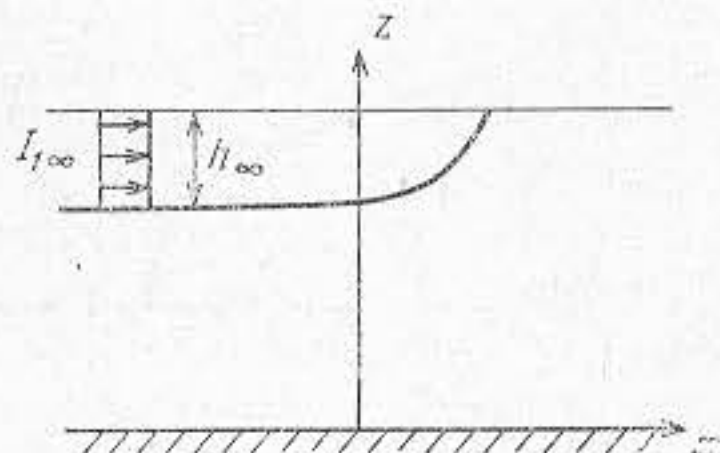


Рис. 3. Движение тонкого «языка» жидкости

медленно ($\partial x_{\text{фр}}/\partial t \sim t^{-1/4}$ в примере III) так как движение поддерживается постоянным притоком жидкости.

В случае нестационарного движения тонких придонных слоев аналогично можно разложить уравнение (25) вблизи $\xi = 1$. Если $I_0 = 0$, $\tau = 0$, то по крайней мере одно нестационарное автомодельное решение уравнения (25) можно отыскать даже тогда, когда оба слоя жидкости имеют сравнимую толщину. При помощи известной процедуры [2] можно показать, что в условиях примера II, скорость автомодельного движения фронта, вызванного растеканием легкой жидкости по поверхности более тяжелой, пропорциональна $t^{-1/2}$.

В случае, когда полный поток I_0 и напряжение трения T постоянны во времени и в пространстве, а течение жидкости двумерно, ($\partial/\partial y = 0$), следует ожидать, что уравнение (25) имеет стационарные решения, описывающие движение фронтальной поверхности с постоянной скоростью C и без изменения ее формы.

Будем теперь считать, что фронтальная поверхность простирается от свободной поверхности до дна.

Решение (25) ищем в виде $\xi = \xi(x - Ct)$. Интегрируя (25) по x , получим

$$-C\xi - \xi \left[\xi (1 - \xi)^3 (3 + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{I_0}{2} (3 - \xi^2) - \tau (1 - \xi)^2 \right] = \text{const}, \quad (34)$$

т. е. $-C\xi + I_1(\xi) = \text{const}$. Поток I_1 , равный произведению средней скорости в верхнем слое на его толщину, при $\xi = 0$ обращается в нуль, поскольку скорость жидкости не может расти до бесконечности. Следовательно, константа интегрирования в (34) равна нулю. Интегрируя (34) еще раз, находим выражение для формы фронтальной поверхности

$$x(\xi) = - \int_0^\xi \frac{f_2(\xi) d\xi}{C + f_1(\xi)} + x_1 + Ct, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= -\frac{I_0}{2} (3 - \xi^2) - \tau (1 - \xi)^2; \\ f_2(\xi) &= \xi (1 - \xi)^3 (3 + \xi), \end{aligned} \quad (36)$$

соответствующих условий в виде

$$l_k = x(1) - x(0) = \frac{2}{I_0} \left(\frac{23}{4} - 8 \ln 2 \right) \approx \frac{0,41}{I_0}; \quad (38a)$$

$$l_k = x(1) - x(0) = \frac{7}{12\tau} \approx \frac{0,58}{\tau}. \quad (39a)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда поверхностный и придонный фронты, относящиеся к одной и той же фронтальной поверхности, движутся с различными, но постоянными скоростями. Соответствующее решение уравнения (25) уже не является стационарным и фронтальная поверхность деформируется во времени. Однако, если поверхностный и придонный фронты разнесены на большое расстояние и слабо влияют друг на друга, то можно считать их бесконечно удаленными. Тогда можно рассматривать по отдельности решения уравнения (25) для движущихся с различной скоростью поверхностного и придонного фронтов, считая, что вдали от фронтов (формально — на бесконечности) фронтальная поверхность выходит на одну и ту же горизонтальную асимптоту, а затем «склеивать» полученные решения. Такое составное решение естественно назвать псевдостационарным. Рассмотрение отдельно существующих поверхностных и придонных фронтов имеет и самостоятельный интерес, например, для условий, изображенных на рис. 3.

В случае поверхностного фронта уравнение (34) и его решение (35) остаются в силе. Условие выхода фронтальной поверхности на горизонтальную асимптоту требует, чтобы знаменатель подынтегрального выражения в (35) обращался в нуль при $\xi = \xi_\infty$, где ξ_∞ — заглубление фронтальной поверхности вдали от фронта: $0 < \xi_\infty < 1$. Скорость движения поверхностного фронта равна

$$C = -f_1(\xi_\infty) = \frac{I_0}{2} (3 - \xi_\infty^2) + \tau (1 - \xi_\infty)^2. \quad (40)$$

В отсутствие ветра интересующее нас решение существует при любых допустимых значениях $I_0 \neq 0$, ξ_∞ . При $\tau \neq 0$ такое решение существует лишь для тех наборов ξ_∞ , I_0 , τ , которые не попадают в область значений, заштрихованных на рис. 6.

В случае придонного фронта константа интегрирования в (34) уже не равна нулю. Ее можно определить из условия $I_2 = 0$ (т. е. $I_1 = I_0$) при $\xi = 1$. После этого, интегрируя уравнение (34) по x , получим

$$x(\xi) = \int_1^\xi \frac{\xi f_2(\xi) d\xi}{C(1 - \xi) - I_0 - \xi f_1(\xi)} + x_2 + Ct, \quad (41)$$

где f_1 , f_2 определены формулами (36), а x_2 — координата придонного фронта в момент $t = 0$. В случае истинно стационарного фронта профиль $x(\xi)$, $0 < \xi < 1$ можно рассчитывать по формулам (35) или (41). Пусть вдали от фронта фронтальная поверхность выходит на горизонтальную асимптоту на глубине ξ_∞ , тогда скорость придонного фронта определяется из условия обращения в нуль знаменателя в формуле (41) при $\xi = \xi_\infty$:

$$C = (1 - \xi_\infty) \left[\frac{I_0}{2} (\xi_\infty + 2) - \tau \xi_\infty \right]. \quad (42)$$

При $\tau \neq 0$ такое решение существует не при любых I_0 , τ , ξ_∞ , а только вне заштрихованной на рис. 6 области.

Заметим, что «склейку» поверхностного и придонного фронта удастся провести также не при любых значениях I_0 , τ , ξ_∞ .

Таким образом при довольно общих предположениях трехмерную нестационарную задачу о медленном движении фронта в неглубоком, двуслойно-стратифицированном водоеме удалось свести к решению двух связанных уравнений (19) параболического типа. Когда уровень свобод-

ной поверхности слабо меняется во времени, то эти уравнения сводятся к одному нестационарному нелинейному уравнению (25). Некоторые частные решения этого уравнения представлены выше.

Эти решения позволяют по заданным внешним параметрам найти скорость движения фронта, форму фронтальной поверхности и поле скорости вблизи фронта.

Предложенная в данной статье модель является обобщением дифференциальных моделей фронтов в мелком водоеме, предложенных в [19, 20]. В этих работах рассматривались только двумерные стационарные задачи в отсутствие касательного напряжения ветра. Отметим, что в конкретных расчетах по своей «модели I», относящейся к неподвижному ($C=0$) фронту при $I_1=0$, $I_2=\text{const} \neq 0$ авторы [19] не обратили внимания на то, что рассчитанный ими профиль фронтальной поверхности пересекается с дном, а это приводит к бессмысленному бесконечному значению скорости в месте пересечения, поскольку толщина нижнего слоя обращается в нуль, а поток I_2 , пропорциональный произведению толщины на скорость, отличен от нуля. На самом деле при росте скорости жидкости до значений, сравнимых с «плотностной» скоростью (т. е. при $Fr \sim 1$) в уравнениях движения необходимо дополнительно учитывать инерционные члены, что существенно усложняет задачу.

Из нестационарных моделей ближе всего к рассматриваемой здесь модель [12]. Отличия уравнения (26) настоящей статьи от (10) в [12] обусловлены тем, что в мелком водоеме вязкий пограничный слой быстро (за время порядка H^2/ν) растет от дна до поверхности, и придонное трение оказывает влияние даже на движение тонкого, не достигающего до дна слоя легкой жидкости. Напротив, в глубоком водоеме [12] поверхностный и придонный погранслои не успевают сомкнуться за характерное время эволюции фронта.

Лабораторные эксперименты или натурные наблюдения, которые можно было бы сравнить непосредственно с расчетами по предложенной модели, автору неизвестны. Косвенным аргументом в пользу предлагаемой модели может служить то обстоятельство, что основанные на аналогичном физическом подходе модели, описывающие фронт интрузии в глубокой стратифицированной жидкости [12], [4] и растекание вязкой баротропной жидкости [5], хорошо количественно согласуются с данными экспериментов [5, 4, 18].

В заключение рассмотрим численные примеры.

1. Пусть глубина длинного однородного канала с горизонтальным дном $H=8$ м, ветер отсутствует, $\nu=100$ см²/с, $\delta=0,01$, полный поток жидкости, приходящийся на единицу ширины $I_0=1$ м²/с. Тогда согласно (37) скорость стационарного фронта в этом случае равна $C=I_0/H=0,12$ м/с. Длина «плотностного клина» l_k , рассчитанная по формуле (38a) в размерных переменных, равна, км

$$l_k = 0,034 \frac{\delta g H^4}{I_0 \nu} \approx 1,4.$$

2. Если при тех же условиях фронтальная поверхность не доходит до дна, а выходит на горизонтальную асимптоту на глубине $h_\infty=3$ м, то скорость поверхностного фронта определяется по формуле (40) при $\tau=0$ и $\xi_\infty=3/8$. В размерных переменных (м/с) получаем

$$C_{\text{пов}} = \frac{I_0}{2H} (3 - \xi_\infty^2) \approx 0,18.$$

Скорость движения придонного фронта в м/с при тех же значениях параметров оказывается равной (42)

$$C_{\text{дн}} = \frac{I_0}{2H} (1 - \xi_\infty) (2 + \xi_\infty) = 0,09.$$

Полученные решения допускают «склеивку», образуя псевдостационарное решение, в котором длина «плотностного клина» уменьшается во времени.

3. Пусть напряжение ветра $T=1$ дин/см, канал замкнутый (т. е. $I_0=0$), остальные параметры те же, что и в примере 1. Согласно (37) стационарный фронт при $I_0=0$ неподвижен, причем длина «клина» в км в соответствии с (39а) равна

$$l_k = \frac{7}{36} \frac{\delta \rho g H^2}{T} \simeq 12,5.$$

Форма «клина» для этого случая приведена на рис. 5 в безразмерных переменных.

Непосредственная проверка показывает, что во всех рассмотренных примерах выполняется условие $Fr^2 \ll 1$, необходимое для применимости полученных формул.

Литература

1. Аксенов А. В., Музылев С. В., Фельзенбаум А. И. К теории выхода экваториального глубинного противотечения на поверхность океана.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 3, с. 559—562.
2. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 208 с.
3. Васильев О. Ф., Квон В. И., Лыткин Ю. М., Розовский И. Л. Стратифицированные течения.— В кн.: Итоги науки и техники, гидромеханика. Вып. 8, М.: ВИНТИ, 1975, с. 74—119.
4. Зацепин А. Г., Шапиро Г. И. Исследование осесимметричной интрузии в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1982, т. 18, № 1, с. 101—105.
5. Зацепин А. Г., Костяной А. Г., Шапиро Г. И. Медленное растекание вязкой жидкости по горизонтальной поверхности.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 1, с. 193—195.
6. Кейлеган Д. Г. Механизм образования неподвижного клина соленой воды.— В кн.: Гидродинамика береговой зоны и эстуариев. Гл. 7. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 394 с.
7. Перри А. Х., Уокер Дж. М. Система океан — атмосфера. Л.: Гидрометеиздат, 1979.
8. Розовский И. Л., Шабрин А. Н. Гидравлические исследования процессов распространения фронта соленой и пресной воды в призматических руслах.— Тр. V Всесоюзного гидрологического съезда. Т. 5. Л.: Гидрометеиздат, 1975, с. 372—380.
9. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
10. Федоров К. Н., Кузьмина Н. П. Океанические фронты.— В кн.: Итоги науки и техники. Океанология. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1979.
11. Фельзенбаум А. И. Динамика морских течений.— В кн.: Итоги науки и техники. Механика. Гидромеханика, 1968. М.: ВИНТИ, 1970.
12. Шапиро Г. И. Динамика мелкомасштабного океанического фронта, находящегося под действием ветра.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 4, с. 419—427.
13. Штеренлихт В. М. Растекание теплой струи в глубоком и широком водоемах.— Тр. Моск. гидромелиоративного ин-та, 1978, т. 57, с. 32—45.
14. Endoh M. Double-celled circulation in coastal upwelling.— J. Oceanographical Soc. Japan, 1977, v. 33, № 1, p. 30—37.
15. Garvine R. W. Dynamics of small-scale oceanic fronts.— J. Phys. Oceanography, 1974, v. 4, № 4, p. 557—569.
16. International Symposium on Stratified flows, Novosibirsk, 1972, N. Y., 1973.
17. Kao T. W., Park C., Pao H. P. Inflows, density currents and fronts.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, № 11, 1912—1922.
18. Maxworthy T. Experimental and theoretical study of horizontal jets in a stratified fluid.— In: International Symposium on Stratified flows, Novosibirsk, 1972. N. Y., 1973, p. 611—618.
19. Oceanic Fronts in Coastal Processes./Ed. M. J. Bouman W. E. Esaias. Berlin, 1978, Chap. 10.
20. Officer C. B. Physical oceanography of estuaries. N. Y. 1976, 465 p.