

# Method of vibrational control in the problem of stabilization of ionization thermal instability in a powerful, continuous CO<sub>2</sub> laser

Shapiro, Georgy

<http://hdl.handle.net/10026.1/11927>

---

Avtomatika i Telemekhanika

Izdatel'stva Nauka

---

*All content in PEARL is protected by copyright law. Author manuscripts are made available in accordance with publisher policies. Please cite only the published version using the details provided on the item record or document. In the absence of an open licence (e.g. Creative Commons), permissions for further reuse of content should be sought from the publisher or author.*

**А**  
**ВТОМАТИКА**  
**И ЭЛЕМЕХАНИКА**

Издательство • Наука •

**6**

1976

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году  
Выходит 12 раз в год

**6**

И Ю Н Ъ

Издательство · Наука · Москва **1976**

# СОДЕРЖАНИЕ

## Детерминированные системы

- Гайдук А. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем с несколькими нелинейностями . . . . . 5
- Меерков С. М., Шапиро Г. И. Метод вибрационного регулирования в задаче стабилизации поизационно-термической неустойчивости в мощном непрерывном  $CO_2$ -лазере . . . . . 12

## Стохастические системы

- Бородкин Л. И., Моттль В. В. Алгоритм обнаружения моментов изменения параметров уравнения случайного процесса . . . . . 23
- Горшков И. С., Курзенев В. А., Перов В. П. Многомерная фильтрация нестационарных случайных процессов по обобщенному критерию на основе фильтра Калмана — Бьюси . . . . . 33
- Казамаров А. А., Хорол Д. М., Шкурский Б. И. Оптимальная пространственно-временная фильтрация в оптико-электронных системах с линейным сканированием . . . . . 38
- Кринецкий Е. И., Ямалутдинова Н. М. Оперативная оценка параметров динамических систем по сжатым сигналам . . . . . 47

## Дискретные системы

- Галкин Л. М. К вопросам анализа и синтеза импульсных экстремальных систем с независимым поиском . . . . . 53
- Комарицкая О. И., Старобин К. Б. Управление дискретным процессом массового производства . . . . . 58
- Миллер Б. М. Об одной задаче нелинейного импульсного управления . . . . . 63

## Развивающиеся системы

- Вильчевский Н. О., Первозванский А. А., Слоущ А. В. Использование планово-производственных функций (ППФ) при планировании в условиях неопределенности. I . . . . . 73
- Дубов Ю. А., Икоева Н. В., Имельбаев Ш. С., Ковальчук С. Г., Копейкин А. Б., Попков Ю. С., Рязанцев А. Н., Шмულიн Б. Л. Оптимальное планирование и проблемы управления развитием городских систем (обзор и задачи исследования) . . . . . 78

## Управление в биологических системах и медицине

- Томович Р. Использование переменной кинематической структуры при управлении движениями скелета . . . . . 117

## Моделирование поведения и интеллекта

- Бауман Е. В., Мучник И. Б. Алгоритм перестройки структуры в задаче аппроксимации графов . . . . . 125
- Старков М. А., Трофимов О. Е., Фризен Д. Г. Автомат для подсчета числа плоских объектов . . . . . 134

## Техническая диагностика

- Лобанов А. В. Динамические состязания и константные неисправности в комбинационных схемах . . . . . 141
- Малышенко Ю. В. Определение мест дополнительных контрольных точек . . . . . 147

## Вычислительная техника в управлении

- Дударев Г. И., Певцов Д. В. Алгоритм вложения логических сетей в однородные среды . . . . . 152

## Технические средства в управлении

- Виноградова Е. П. Использование явления шунирования тока в полупроводниках для развертки изображения . . . . . 161
- Копков Г. А. Исследование гидродинамики струйных прямоочных элементов . . . . . 165
- Шорин В. П. Об оптимизации аналоговых моделей разветвленных гидравлических цепей . . . . . 169

## Заметки

- Мейлахс А. М. О стабилизации нелинейных систем автоматического регулирования . . . . . 176
- Сабаев Е. Ф., Сабаева Т. А. Условия экспоненциальной устойчивости систем переменной структуры (СПС) . . . . . 180

## МЕТОД ВИБРАЦИОННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ИОНИЗАЦИОННО-ТЕРМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В МОЩНОМ НЕПРЕРЫВНОМ СО<sub>2</sub>-ЛАЗЕРЕ

С. М. МЕЕРКОВ, Г. И. ШАПИРО

(Москва)

Развивается теория стабилизации ионизационно-термической неустойчивости газоразрядной плазмы, основанная на методе вибрационного регулирования. Находятся расчетные формулы для оптимальных управляющих воздействий. Проводится сравнение теоретических и экспериментальных данных.

В настоящее время непрерывные газовые лазеры большой мощности привлекают все большее внимание. Это связано с широкими возможностями применения мощного когерентного излучения в научных и промышленных целях.

Однако на пути создания мощных непрерывных газоразрядных лазеров имеется ряд нерешенных проблем. Одной из причин, препятствующих повышению мощности лазера, является шнурование газового разряда при повышении энерговклада [1] вследствие возникающих в разряде неустойчивостей.

Из экспериментов [2, 3] известно, что энерговклад в разряд можно повысить наложением внешнего периодического электрического поля. Однако в литературе не опубликованы какие-либо теоретические построения, объясняющие этот факт и предлагающие методы расчета параметров внешнего периодического воздействия.

В настоящей работе развита теория стабилизации ионизационно-термической неустойчивости слабоионизированной плазмы [4], основанная на использовании метода вибрационного регулирования [5]. Эта теория не только дает качественное объяснение эффекту стабилизации, но и позволяет сделать количественные оценки параметров стабилизирующих вибраций.

В разделе 1 статьи кратко описана схема развития ионизационно-термической (ИТ) неустойчивости (см. [4]) в плазме положительного столба тлеющего разряда. В разделе 2 содержится постановка задачи вибрационной стабилизации ИТ-неустойчивости. В последующих разделах содержится решение задачи и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

### 1. Схема развития ионизационно-термической неустойчивости

ИТ-неустойчивость является «медленной», т. е. на ее развитие существенное влияние оказывает не только движение легких частиц — электронов, но и тяжелых — атомов, ионов и молекул. Физическая суть ИТ-неустойчивости состоит в следующем [4]. Предположим, что в некотором объеме с характерным размером  $\Lambda$  бесконечной плазмы положительного

столба тлеющего разряда возникла флуктуация  $\delta n > 0$  концентрации свободных электронов (см. рис. 1). Это приводит к дополнительному джоулеву нагреву рассматриваемого объема ( $\delta T > 0$ ) и к расширению газа (флуктуация концентрации тяжелых частиц  $\delta N < 0$ ). При этом изменяется параметр  $E/N$ , где  $E$  — напряженность электрического поля ( $\delta(E/N) > 0$ ), что приводит к росту константы ионизации ( $\delta k_i > 0$ ) и снова к увеличению электронной концентрации  $n$ . Указанные процессы «раскачки» неустойчивости показаны на рис. 1 прямыми стрелками, а физические процессы,

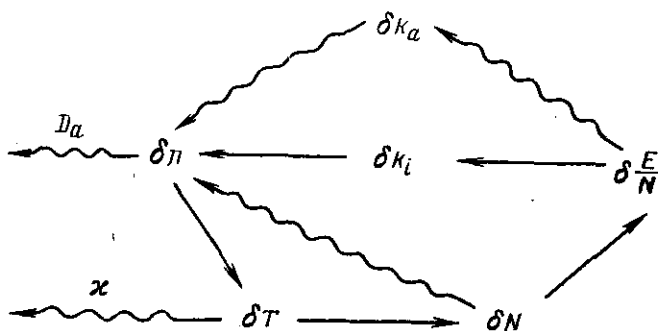


Рис. 1

стремящиеся стабилизировать систему, — волнистыми. Главные стабилизирующие диссипативные процессы — амбиполярная диффузия (с коэффициентом  $D_a$ ) и молекулярная теплопроводность (с коэффициентом температуропроводности  $\chi$ ). На рис. 1  $k_a$  — константа диссоциативного прилипания электрона к молекуле  $\text{CO}_2$ .

Устойчивость плазмы газового разряда определяется конкуренцией процессов развития и подавления неустойчивости. Поскольку скорость указанных диссипативных процессов зависит от геометрических размеров флуктуации (пропорциональна  $1/\Lambda^2$ ), то и граница устойчивости зависит от  $\Lambda$ .

Следуя [4], выпишем теперь уравнения, описывающие поведение плазмы тлеющего разряда.

Уравнение электронного баланса

$$(1) \quad \frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \mathbf{v} = \left( k_i \left( \frac{E}{N} \right) - k_a \left( \frac{E}{N} \right) \right) Nn - \frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_e + D_a \nabla^2 n - \gamma_0 n^2,$$

где  $\nabla^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}$ ,  $e$  — заряд электрона,  $\mathbf{v}$  — массовая скорость,

$\mathbf{j}_e$  — плотность электронного тока,  $\gamma_0$  — коэффициент рекомбинации.

Уравнение энергии

$$(2) \quad \frac{d}{dt} (NT) + \gamma NT \operatorname{div} \mathbf{v} = \gamma \chi N \nabla^2 T + (\gamma - 1) k_v^T N^* h\nu N,$$

где  $\gamma$  — постоянная адиабаты,  $k_v^T$  — константа колебательной релаксации,  $N^*$  — концентрация колебательно возбужденных молекул,  $h\nu$  — энергия колебательного кванта.

Наконец, уравнение колебательной релаксации

$$(3) \quad \frac{dN^*}{dt} + N^* \operatorname{div} \mathbf{v} = k_* Nn - k_v^T N N^*,$$

где  $k_*$  — константа колебательного возбуждения электронным ударом.

Как и в [4], дополним уравнения (1)–(3) уравнениями газовой динамики при постоянном давлении, уравнениями электродинамики в предположении квазинейтральности плазмы и отсутствия магнитных взаимодействий. При этом получаем замкнутую систему нелинейных уравнений ИТ-неустойчивости с учетом кинетики колебательного возбуждения.

Полученная система уравнений при достаточно больших значениях  $|v|$ , т. е. при быстрой прокачке газа через камеру, имеет [4] решение, соответствующее равномерному распределению параметров плазмы по объему.

Для исследования ИТ-неустойчивости можно считать колебательную релаксацию «быстрым» процессом. Это предположение не сказывается на качественных свойствах ИТ-неустойчивости и на возможности ее вибрационной стабилизации, однако позволяет получить простые формулы, имеющие ясный физический смысл.

С учетом сделанных замечаний линеаризуем систему уравнений ИТ-неустойчивости в окрестности указанного решения, предполагая при этом, что малые отклонения пропорциональны  $e^{-ikr}$ ,  $|k| = k = 2\pi/\Lambda$ . Считая, что  $k$  — достаточно большая величина, и вследствие этого пренебрегая малыми членами, получаем следующую систему уравнений:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta n &= -D_a k^2 \delta n + (k_i - k_a - \hat{k}) n \delta N, \\ \frac{d}{dt} \delta N &= -\frac{h\nu}{\beta T} k \cdot N \delta n - \chi k^2 \delta N, \end{aligned}$$

$$\text{где } \beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \hat{k} = k_i \hat{k}_i - k_a \hat{k}_a, \quad \hat{k}_i = \frac{d \ln k_i}{d \ln (E/N)}, \quad \hat{k}_a = \frac{d \ln k_a}{d \ln (E/N)}.$$

При выводе уравнений (4) было учтено, что при  $k \perp E$  ИТ-неустойчивость имеет наибольший инкремент (см. [4]).

Условия устойчивости системы (4) имеют вид:

$$(5) \quad \begin{aligned} D_a k^2 + \chi k^2 &> 0, \\ D_a \chi k^4 + (k_i - k_a - \hat{k}) n \frac{h\nu}{\beta T} k \cdot N &> 0. \end{aligned}$$

Устойчивость газового разряда определяется условиями (5) лишь при достаточно больших  $k$ ; при малых значениях  $k$  устойчивость газового разряда обеспечивается известными способами.

Очевидно, что первое из неравенств (5) выполнено. Второе неравенство выполняется лишь при достаточно малом  $n \leq n_0$ , так как при обычных условиях  $\hat{k}_i \gg 1$ , т. е.  $k_i - k_a - \hat{k} < 0$ . Физически это означает, что устойчивость тлеющего разряда имеет место лишь при не слишком больших энерговкладах. Увеличение энерговклада приводит к проявлению ИТ-неустойчивости. Отсюда возникает задача: обеспечить устойчивость тлеющего разряда при больших энерговкладах, т. е. при  $n > n_0$ . Постановка и решение этой задачи как задачи автоматического регулирования содержится в последующих разделах.

## 2. Постановка задачи вибрационной стабилизации ИТ-неустойчивости

Из физической сути ИТ-неустойчивости следует, что для стабилизации рассмотренных процессов «раскачки» нельзя использовать принцип обратной связи. Действительно, для использования этого принципа необходимо выполнить следующие операции: 1) измерить концентрацию свободных электронов в каждом элементарном объеме разрядной камеры; 2) вырабо-

тать управляющие воздействия для каждой точки разрядной камеры. Разумеется, выполнить каждую из этих операций не представляется возможным.

Понятно также, что и принцип компенсации возмущений не может быть использован для стабилизации ИТ-неустойчивости (в частности, из-за того, что отсутствует возможность измерения помех).

В связи с этими обстоятельствами для стабилизации ИТ-неустойчивости будем использовать метод вибрационного регулирования — способ изменения динамических свойств систем регулирования за счет введения параметрических вибраций с нулевым средним значением [5]. Как отмечалось в [5], использование этого метода не требует ни измерения отклонений регулируемой величины, ни измерения возмущающих воздействий.

В статье [6] получено необходимое и достаточное условие эффективности метода вибрационного регулирования, которое состоит в том, что след матрицы исходной линейной системы отрицателен. Очевидно, что для системы (4) это условие оказывается выполненным при всех  $k > 0$ .

В случае системы (4) вибрации параметров могут быть введены за счет периодических колебаний величин  $n$ ,  $k_i$ ,  $k_a$  и  $N$  вокруг некоторых постоянных значений. Существенные вибрации величины  $N$  физически не могут быть реализованы. Вибрации коэффициентов  $k_i$  и  $k_a$  в настоящей работе не рассматриваются. В связи с этим задачу вибрационной стабилизации ИТ-неустойчивости тлеющего разряда сформулируем следующим образом: ввести вибрации (с нулевым средним значением) концентрации свободных электронов вокруг некоторого значения  $\bar{n}$  таким образом, чтобы тлеющий разряд, описываемый уравнениями (4), оказался устойчивым, в то время как в случае отсутствия вибраций при  $n = \bar{n}$  система (4) неустойчива.

### 3. Условия устойчивости

Общие формулы метода вибрационного регулирования приведены в работе [5]. При выводе этих формул предполагалось, что амплитуда гармонических вибраций значительно превышает среднее значение параметра. В рассматриваемой системе это условие не может быть выполнено, так как величина  $n$  положительна. В связи с этим будем рассматривать периодические вибрации  $f_1(\omega t) = n(t) - \bar{n}$ , имеющие средние значения, равные нулю и ограниченные снизу:

$$\inf_{t \in [0, T=2\pi/\omega]} f_1(\omega t) = -v_0, \quad 0 < v_0 \leq \bar{n}.$$

Из физических соображений следует, что верхнее граничное значение функции  $f_1(\omega t)$  может существенно превышать величину  $\bar{n}$ . Имея в виду эти замечания, вибрации  $f_1(\omega t)$  будем обозначать следующим образом:

$$f_1(\omega t) = v_0 f(\omega t) = v_0 \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \cos i\omega t + \beta_i \sin i\omega t),$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — коэффициенты Фурье функции  $f(\omega t)$ .

С учетом введенных вибраций перепишем систему (4) в виде

$$(6) \quad \dot{u} = (A + B(t))u,$$

где

$$(7) \quad u = \{u_1 = \delta n, u_2 = \delta N\},$$

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^2 = \left\| \begin{array}{cc} -D_a k^2 & (k_i - k_a - \bar{k}) \bar{n} \\ -\frac{h\nu}{\beta T} k \cdot N & -\kappa k^2 \end{array} \right\|,$$



$$B(t) = \begin{vmatrix} 0 & f_1(\omega t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Утверждение 1.** При выполнении соотношений

$$(8) \quad \frac{|a_{21}|v_0\xi}{\omega^2} = \varepsilon, \quad \frac{|\det A|}{\omega^2} \sim \varepsilon\mu,$$

$$\frac{|a_{11}+a_{22}|}{\omega} \sim \varepsilon, \quad \mu = \sqrt[s]{\varepsilon},$$

где  $s \geq 1$  — некоторое целое число,  $\varepsilon$  — достаточно малая величина, а

$$(9) \quad \xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2 + \beta_i^2}{i^2},$$

условия устойчивости системы (6) имеют вид:

$$(10) \quad a_{11} + a_{22} < 0, \quad \det A + \frac{a_{21}^2 v_0^2 \xi^2}{2\omega^2} > 0.$$

Доказательство \* утверждения 1 приведено в приложении I.

Второе условие (10) выражает эффект вибрационной стабилизации: система (6) остается устойчивой даже при  $\det A < 0$  вплоть до значений

$$|\det A| < \frac{a_{21}^2 v_0^2 \xi^2}{2\omega^2}.$$

#### 4. Оптимальная форма стабилизирующих вибраций

Из формулы (10) следует (см. также раздел 5), что «расширение» области устойчивости системы (4) зависит от величины  $\xi$ , т. е. от формы используемых вибраций. В связи с этим возникает вопрос, какая форма вибраций обеспечивает максимальное «расширение» области устойчивости, т. е. максимальное  $\xi$ .

Для точной постановки этого вопроса рассмотрим класс  $K_{-1, M}$  кусочно-непрерывных периодических с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega$  функций  $f(\omega t)$ , ограниченных снизу и сверху величинами  $-1$  и  $M > 0$  соответственно и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\omega t) dt = 0.$$

Тогда задачу отыскания оптимальной формы стабилизирующих вибраций можно понимать как задачу нахождения такой функции  $f^*(\omega t) \in \overline{K}_{-1, \infty}$  ( $\overline{K}_{-1, \infty}$  — замыкание  $K_{-1, M}$  при  $M \rightarrow \infty$ ), на которой достигается  $\sup \xi(f(\omega t))$  при  $f(\omega t) \in K_{-1, M}$ . Решение этой задачи содержится в следующем утверждении.

**Утверждение 2.** Функция  $f^*(\omega t)$  определяется формулой

$$(11) \quad f^*(\omega t) = T_0 \delta(t - rT_0) - 1,$$

где  $T_0 = 2\pi/\omega$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , а  $\delta(z)$  —  $\delta$ -функция. При функции  $f^*(\omega t)$ , определяемой формулой (11), величина  $\xi^2$  принимает значение

$$(12) \quad \xi^2(f^*(\omega t)) = \sup_{f \in K_{-1, M}} \xi^2(f(\omega t)) = 2/3\pi^2.$$

Доказательство утверждения 2 изложено в приложении II.

\* В частном случае  $s=1$  и  $f(\omega t) = \sin \omega t$  утверждение 1 совпадает с условиями устойчивости Н. Н. Боголюбова [7].

Таким образом, оптимальной формой стабилизирующих вибраций является  $\delta$ -функция\*. В задаче вибрационной стабилизации тлеющего разряда это означает, что для поддержания среднего значения электронной концентрации на уровне  $\bar{n}$  следует поддерживать концентрацию свободных электронов на уровне  $\bar{n}-v_0$  и накладывать на эту величину последовательность  $\delta$ -функций вида  $T_0 v_0 \delta(t-rT_0)$ ,  $r=0, 1, \dots$ ;  $T_0=2\pi/\omega$ . Именно в этом случае достигается максимальное «расширение» области устойчивости.

### 5. Обсуждение

Пусть  $\bar{n}$  и  $n_1$  — соответственно среднее и минимальное значения электронной концентрации;  $n_0$  — концентрация свободных электронов, которая определяет границу устойчивости системы (6), (7) без стабилизирующих вибраций

$$(13) \quad \det A(n_0)=0, \quad \text{т. е.} \quad n_0 = \frac{|a_{11}a_{22}|}{|b_{12}a_{21}|},$$

где  $b_{12}=k_1-k_a-k$ .

Учитывая (13), перепишем второе из неравенств (10) и первые два соотношения (8) в виде:

$$(14) \quad \begin{aligned} x-1 &< \frac{\xi^2}{2z}(x-y)^2, \\ x-y &< \frac{\epsilon_0}{\xi}z, \quad x-1 < \delta_0 z, \end{aligned}$$

где  $\epsilon < \epsilon_0$ ,  $\epsilon\mu < \delta_0$ , а  $x$ ,  $y$  и  $z$  — безразмерные переменные, определенные формулами:

$$(15) \quad x = \frac{\bar{n}}{n_0}, \quad y = \frac{n_1}{n_0}, \quad z = \frac{\omega^2}{|b_{12}a_{21}|n_0}.$$

Рассмотрим плоскость  $(z, x)$ . Область плоскости  $(z, x)$ , в которой выполнены неравенства (14), будем называть областью устойчивости (см. рис. 2). Исследование этой области позволяет найти максимальную среднюю концентрацию  $\bar{n}$  электронов и соответствующую ей частоту  $\omega$  вибраций. Будем считать, что  $\delta_0 < \epsilon_0/\xi$  и  $1/2\xi^2 < \delta_0 < 2/\xi^2$ . Тогда область устойчивости ограничена по  $x$  и, как видно из рис. 2, максимальное значение  $x$  определяется точкой  $F$  с координатами:

$$(16) \quad z_F = \frac{1-y}{\delta_0} \cdot \frac{1}{D-1}, \quad x_F = \frac{D-y}{D-1},$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{\delta_0 \xi^2}}.$$

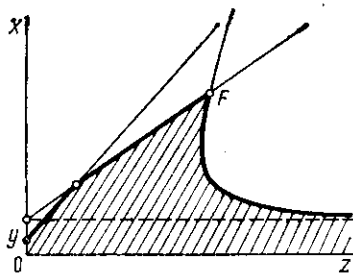


Рис. 2

Отсюда, в частности, видно, что величина  $x_F = \bar{n}_r/n_0$  растет вместе с  $\xi$  (см. раздел 4), т. е. правильно выбранная форма вибраций не только увеличивает стабильность плазмы, но и позволяет получить больший энерго-вклад.

Для оценки увеличения энерговклада при использовании вибрационно-го регулирования рассмотрим численный пример. Существующие в настоящее время мощные непрерывные  $\text{CO}_2$ -лазеры характеризуются следу-

\* Эффективность использования  $\delta$ -образных импульсов для стабилизации положительного столба непрерывного тлеющего разряда из физических соображений была предсказана Ю. П. Райзером.

ющими параметрами:  $k_i \approx 10^{-8} \text{ см}^3/\text{сек}$ ,  $N \approx 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $n \approx 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $h\nu/\beta T \approx 4$ ,  $\hat{k} \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3/\text{сек}$ ,  $\kappa \approx D_a \approx 10 \text{ см}^2/\text{сек}$ ,  $k_i \approx k_a \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ см}^3/\text{сек}$ . Примем  $\delta_0 = 0,25$ ,  $\xi^2 = 6,25$ ,  $y = 0,2$ . Тогда из (16) находим:

$$x_F = 5, \quad z_F = 16,$$

т. е. с учетом (15)

$$\bar{n} = 5n_0, \quad \omega \approx 8 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}, \quad \text{т. е. } T_0 \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}.$$

Таким образом, в данном примере использование принципа вибрационного регулирования позволило увеличить энергозатраты в плазму тлеющего разряда в пять раз.

## 6. Физические способы реализации стабилизирующих вибраций оптимальной формы

Вибрации электронной концентрации в виде последовательности  $\delta$ -функций могут быть достигнуты различными путями. Ниже кратко рассматриваются два из них — наложение импульсного электрического поля большой напряженности и использование электронных пучков.

### а. Наложение импульсного электрического поля

Очевидно, что наложение импульсного электрического поля большой амплитуды может приводить к соответствующим изменениям концентрации свободных электронов. Однако для применимости условий устойчивости (10) необходимо также, чтобы все остальные параметры системы (4) изменялись достаточно мало. Покажем, что это имеет место.

Примем, что период повторения импульсов наложенного электрического поля совпадает с подсчитанным в примере раздела 5, т. е.  $T_0 \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$ . Оценки показывают, что при этом  $N \approx \text{const}$ , т. е. газ несжимаем. Тогда основные уравнения (1) — (3) в пренебрежении пространственными градиентами принимают вид:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= (k_i - k_a) N n - \gamma_0 n^2, \\ \frac{dT}{dt} &= (\gamma - 1) k_e T N h \nu, \\ \frac{dN^*}{dt} &= N (k_i n - k_e T N^*). \end{aligned}$$

Пусть импульс наложенного электрического поля  $E$  имеет прямоугольную форму, начинается при  $t=0$  и заканчивается при  $t=T_1 \ll T_0$ . Тогда из системы (17) можно получить, что при принятых численных характеристиках плазмы (см. раздел 5) и при  $T_1 \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ ,  $\gamma_0 \approx 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$ ,  $k_i(T_1) - k_a(T_1) \approx 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$ ,  $n(T_1) \approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ,  $l = 100 \text{ см}$ ,  $v = 200 \text{ м/сек}$  (где  $l$  — длина разрядной камеры, а  $v$  — скорость прокачки газа) колебания всех параметров системы (4), кроме концентрации свободных электронов, малы при всех  $t \in [T_1, T_0]$ . Колебания величины  $\hat{k} - k_i + k_a$  при  $t \in [0, T_1]$  не влияют на устойчивость, так как  $T_1 \ll T_0$ .

Отметим, что необходимое значение амплитуды импульсов наложенного поля  $E$  может быть вычислено из соотношения  $k_i(E/N) - k_a(E/N) \approx 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$ .

Итак, при длительности, периодичности и величине импульсов электрического поля, удовлетворяющих указанным выше требованиям, выполнены все условия применимости изложенной теории. При этом форма стабилизирующих вибраций близка к оптимальной.

## б. Использование электронного пучка

Вибрации электронной концентрации оптимальной формы можно осуществить также инжектированием электронного пучка в плазму. Анализ этого случая проводится аналогично рассмотренному в разделах 1 и 3, с тем лишь отличием, что в уравнение электронного баланса добавляется член, соответствующий внешнему источнику. При этом также проявляется эффект вибрационной стабилизации.

### 7. Сравнение с результатами эксперимента

В работе [3] экспериментально наблюдалось повышение стабильности и энерговыклада в тлеющий разряд при наложении дополнительных импульсов электрического поля. В опытах период повторения импульсов был  $T_0^{\text{эксп}} \geq 10^{-4}$  сек, максимальная концентрация электронов  $n_{\text{макс}} \sim 2 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup> средняя по времени концентрация электронов  $\bar{n} \sim 0,6 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Экспериментально наблюдалось увеличение энерговыклада по сравнению с разрядом без импульсов в шесть раз. Эти данные удовлетворительно совпадают с результатами настоящей работы.

В эксперименте период повторения импульсов  $T_0^{\text{эксп}}$  был несколько меньше, чем полученный теоретически ( $T_0^{\text{теор}} \sim 8 \cdot 10^{-4}$  сек). Видимо, это связано с тем, что возникающие в реальной системе вибрации коэффициентов  $k_i$ ,  $k_a$  и  $\hat{k}$ , не учитываемые в изложенной теории, также дают дополнительный стабилизирующий эффект.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Доказательство утверждения 1

Из (6), (7), используя замену  $\tau = \omega t$ , получаем ( $v' = dv/d\tau$ ,  $v = u_2$ ):

$$(II.1) \quad v'' - \frac{a_{11} + a_{22}}{\omega} v' + \left( \frac{\det A}{\omega^2} + \frac{a_{21} v_0 f(\tau)}{\omega^2} \right) v = 0.$$

Введем обозначения:

$$(II.2) \quad \frac{a_{11} + a_{22}}{\omega} = \varepsilon a_1, \quad \frac{|a_{21}| v_0 \xi}{\omega^2} = \varepsilon,$$

$$\frac{\det A}{\omega^2} = \varepsilon \mu a_2, \quad |a_i| \sim 1 \quad (i=1, 2),$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s \geq 1, \quad f_2(\tau) = \frac{f(\tau)}{\xi}.$$

Рассмотрим подстановку:

$$v = y + \varepsilon f_2(\tau) y, \quad v' = \varepsilon \Omega + \varepsilon f_2'(\tau) y.$$

Отсюда с учетом (II.1) и (II.2) получаем:

$$(II.3) \quad y' = \mu^2 \Omega + 0(\mu^{2s}),$$

$$\Omega' = -(f_2'' + f_2) y - \mu a_2 y - \mu^2 [\Omega f_2' - a_1 \Omega - a_1 f_2' y + f_2^2 y] + 0(\mu^{s+1}).$$

Для изучения системы уравнений (II.3) воспользуемся схемой усреднения В. М. Волосова [8]. С этой целью рассмотрим вырожденную систему:

$$y' = 0, \quad \Omega' = -(f_2'' + f_2) y.$$

Ее решение:

$$y(\tau) = y_0, \quad \Omega(\tau) = -(f_2' + F) y + \Omega_0, \quad F = \int_0^\tau f_2(\xi) d\xi.$$

Введем обозначения:

$$\Phi = \Omega(\tau) + (f_2' + F) y,$$

$$X_1 = -a_2 y, \quad X_2 = -f_2' \Omega + a_1 \Omega + a_1 f_2' y - f_2^2 y.$$

Следую схеме усреднения В. М. Волосова, переходим к системе уравнений, описывающих медленные движения:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \mu^s [-(f_2' + F)y + \Omega_0], \\ \frac{d\Omega_0}{d\tau} &= \mu \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} (X_1 + \mu^{s-1} X_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mu^{s-1} [-(f_2' + F)y + \Omega_0] \right\}. \end{aligned}$$

Получили систему в стандартной форме [7]. Усредним ее. Все приближения вплоть до  $(s-1)$ -го дают:

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\bar{\Omega}_0}{d\tau} = -\mu a_2 \bar{y}.$$

В  $s$ -м приближении получаем

$$\bar{y}'' - \mu^s a_1 \bar{y}' + \mu^{s+1} a_2 \bar{y} + \mu^{2s} \frac{1}{2\xi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2 + \beta_i^2}{i^2} \bar{y} = 0,$$

где

$$\alpha_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\omega t) \cos i\omega t dt,$$

$$\beta_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\omega t) \sin i\omega t dt.$$

Отсюда, возвращаясь к исходным обозначениям и исходной независимой переменной  $t$  и учитывая вторую теорему принципа усреднения [7], находим условия устойчивости системы уравнений (6), (7) в виде (10).

## II. Доказательство утверждения 2

Рассмотрим разложение  $f(\omega t)$  в ряд Фурье

$$f(\omega t) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \cos(i\omega t + \varphi_i).$$

Покажем, что  $\gamma_i(f(\omega t)) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\omega t) \cos(i\omega t + \varphi_i) dt < 2N$  при всех  $f(\omega t) \in K_{-N, M}$ ,

$i=1, 2, \dots$ . С этой целью рассмотрим следующую задачу: определить функции  $\bar{u}_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots$ , на которых достигается

$$(П.4) \quad \max \int_0^{T_0} u_i(t) \cos(i\omega t + \varphi_i) dt, \quad i=1, 2, \dots,$$

при ограничениях

$$(П.5) \quad \int_0^{T_0} u_i(t) dt = 0, \quad -N \leq u_i \leq M, \quad M, N > 0.$$

Очевидно, что эта задача эквивалентна задаче оптимального управления: определить такое управление  $\bar{u}_i(t)$ , при котором

$$x_1^i(T_0) - \max$$

с учетом дифференциальных ограничений:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1^i &= u_i \cos(i\omega t + \varphi_i), & x_1^i(0) &= 0, \\ \dot{x}_2^i &= u_i, & x_2^i(0) &= x_2^i(T_0) = 0 \end{aligned}$$

и ограничений на управление:

$$-N \leq u_i(t) \leq M, \quad M, N > 0.$$

Эта задача может быть решена при помощи принципа максимума [9]. В соответствии с формализмом этого принципа рассмотрим сопряженную систему:

$$\dot{p}_1^i = 0; \quad p_1^i(T_0) = -1,$$

$$\dot{p}_2^i = 0; \quad p_2^i = -c_2^i.$$

Следовательно, гамильтониан имеет вид

$$H = u_i(c_2^i - \cos(\omega t + \varphi_i)).$$

Отсюда

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} M & \text{при } c_2^i - \cos(\omega t + \varphi_i) < 0, \\ -N & \text{при } c_2^i - \cos(\omega t + \varphi_i) > 0. \end{cases}$$

Итак, оптимальная функция  $\tilde{u}_i(t)$  при всех  $t$  и для каждого  $i$  принимает лишь граничные значения. Для того чтобы выполнялись граничные условия для второго

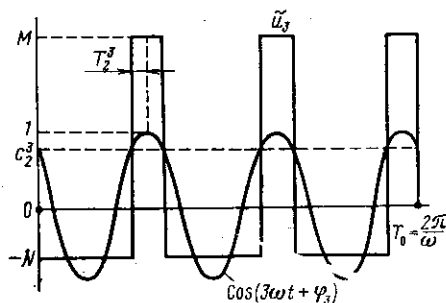


Рис. 3

из уравнений (П.6), достаточно выбирать  $c_2^i$  соответствующим образом. Отсюда находим величину  $T_2^i$  (см. рис. 3):

$$T_2^i = \frac{1}{2} \frac{(T_0/i)N}{M+N}.$$

Для оптимальной функции  $\tilde{u}_i(t)$   $i$ -е коэффициенты Фурье имеют вид:

$$\gamma_i^i = 2N \sin\left(\pi \frac{i^2 T_2}{T_0}\right) / \left(\pi \frac{i^2 T_2}{T_0}\right), \quad i=1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что  $\gamma_i^i < 2N$ , а так как

$$\gamma_i^i < \gamma_i^i, \quad \text{то } \xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^i / i^2 < \frac{2}{3} \pi^2 N^2.$$

Рассмотрим функцию

$$(П.7) \quad f_1(\omega t) = N(T_0 \delta(t - rT_0) - 1), \\ \omega = 2\pi/T_0, \quad r=0, 1, \dots$$

Очевидно, что для этой функции  $\xi^2 = 2/3 \pi^2 N^2$ . Тем самым функция (П.7) является точкой супремума функционала  $\xi$  при условии (П.5). Очевидно, что  $f_1(\omega t)$  совпадает с  $f^*(\omega t)$ , заданной формулой (11), при  $N=1$ .

Поступила в редакцию  
5 сентября 1975 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Демария А. И. Мощные лазеры непрерывного действия на  $\text{CO}_2$  (обзор). Тр. ин-та инженеров электроники и радиотехники, т. 61, стр. 54–74, 1973.
2. Hill A. E. Continuous uniform excitation of midium pressure  $\text{CO}_2$  laser plasmas by means of control avalanche ionisation. Appl. Phys. Lett., vol. 22, No. 12, p. 670–673, 1973.
3. Генералов Н. А., Зимаков В. П., Косыгин В. Д., Райзер Ю. П., Ройтенбург Д. И. Метод существенного повышения предела стабильности разряда в быстропроточных лазерах большого объема. Письма ЖТФ, т. 1, вып. 9, стр. 431–435, 1975.
4. Сорока А. М., Шапиро Г. И. Ионизационно-термическая неустойчивость в плазме тлеющего разряда. Физика плазмы, № 6, стр. 879–883, 1975.
5. Меерков С. М. Вибрационное регулирование. Автоматика и телемеханика, № 2, стр. 34–43, 1973.
6. Меерков С. М., Циткин М. Ю. Об эффективности метода вибрационного регулирования для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями  $n$ -го порядка. Автоматика и телемеханика, № 4, стр. 5–10, 1975.
7. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
8. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. наук, т. XVII, вып. 6 (108), стр. 3–126, 1962.
9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Д. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

---

### THE METHOD OF VIBRATIONAL CONTROL IN STABILIZATION OF IONIZATION-THERMAL INSTABILITY OF A POWERFUL CONTINUOUS $\text{CO}_2$ -LASER

S. M. MEERKOV, G. I. SHAPIRO

The paper develops vibrational control-based the stabilization theory for ionization-thermal instability of gas discharge plasma. Computing formula are found for optimal control actions. Theoretical and experimental data are compared.

---