

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР



*Г. И. Шапиро*

**ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ  
В ИЗОЛИРОВАННЫХ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ**

ПРЕПРИНТ №45

МОСКВА 1974 год

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Г.И. ШАПИРО

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ  
В ИЗОЛИРОВАННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Препринт № 45

Москва - 1974 год

1. В данной работе излагается эффективный метод решения спектральных задач переноса излучения и лучистого теплообмена в неоднородной среде для изолированных спектральных линий. Приводятся простые формулы для численных расчетов. В качестве примера рассмотрен перенос излучения в  $L\alpha$  линии водорода.

2. При учете излучения в низкотемпературной плазме в уравнение энергетического баланса входит дополнительный член

$q$  - выделение энергии за счет излучения [1].

$$(1) \quad q = \operatorname{div} \vec{S} = 4\pi \int \kappa_\nu B_\nu d\nu - \iint_{\nu, \Omega} \kappa_\nu I_\nu d\Omega d\nu$$

$$(2) \quad \vec{S}(\vec{r}) = \int_{\Omega} I(\vec{r}, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\Omega$$

$$(2a) \quad I = \int_{\nu} I_\nu d\nu,$$

где  $\kappa_\nu$  - спектральный коэффициент поглощения с учетом вынужденного излучения,

$B_\nu$  - планковская спектральная интенсивность,

$\vec{\Omega}$  - единичный вектор,

$d\Omega$  - элемент телесного угла,

$\vec{S}$  - лучистый поток,

$I_\nu$  - спектральная интенсивность излучения подчиняется

уравнению переноса

$$(3) \quad \frac{dI_\nu}{dx} = \kappa_\nu (B_\nu - I_\nu)$$

(Рассеянием, как обычно, пренебрегаем).

Известно, что существенный вклад в величину  $\vec{S}$  могут вносить спектральные линии [4,3]. Однако, для линейчатых

спектров прямой метод расчета величин  $\bar{S}$  и  $q$ , т.е. вычисление квадратуры (9) при заданных распределениях  $\alpha_\nu(\vec{r})$ ,  $B_\nu(\vec{r})$  или численное решение уравнения (3) и последующее интегрирование по формуле (2а) приводит к очень большому объему вычислений. Например, для одной изолированной спектральной линии необходимо взять  $N \sim 100$  точек при численном интегрировании по частоте.

Поскольку в уравнение энергий входит интегральная по спектру величина  $\bar{S} = \int \bar{S}_\nu d\nu$ , в принципе нет необходимости знать спектральный состав излучения [2]. Основа предлагаемого метода состоит в специальном, физически обоснованном, способе разделения переменных в коэффициенте поглощения (4). В этом случае можно разделить интегрирование по частоте и по пространству в формуле (9). Метод позволяет вычислить характеристики излучения для линии в целом и тем самым понизить число переменных в уравнениях радиационной газовой динамики при указанных ниже предположениях.

3. Рассчитаем характеристики поля излучения  $I, q$  в некоторой области  $D$ . Пусть во всех точках  $r \in D$  выполняются условия

$$(4) \quad \alpha_\nu(\vec{r}) = f_1(\vec{r}) f_2\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu(\vec{r})}\right)$$

$\nu_0$  - центр линии

$\Delta\nu(\vec{r})$  - переменная полуширина линии

$$(5) \quad \frac{1}{B_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \gamma_{\text{пл}} \ll 1,$$

т.е. планковская спектральная интенсивность слабо меняется внутри линии.

Под  $\gamma_{\text{экв}}$  - эквивалентной шириной линии понимается тот участок спектра, где  $\alpha_{\nu}(\vec{r}_{\text{хар}}) \cdot L \geq 1$ ,  $L$  - характерный размер области  $D$ .

$$(6) \quad J_{\nu} = \alpha_{\nu} B_{\nu}$$

$J_{\nu}$  - спектральная излучательная способность.

Условия (4, 5, 6) заведомо выполняются для переноса излучения спектральной линией, если

а) вещество в области  $D$  находится в состоянии локального термодинамического равновесия.

б) Линия изолированная, т.е. линии не перекрываются, и сплошным спектром можно пренебречь в интервале

$$\nu_0 - \gamma_{\text{экв}} < \nu < \nu_0 + \gamma_{\text{экв}}$$

в) Сдвиг линии  $\Delta \nu_{\text{сд}} \ll \gamma_{\text{экв}}$

г) Механизм уширения один и тот же для всех точек области  $D$ .

В этом случае представление  $\alpha_{\nu}(\vec{r})$  в форме (4) можно обосновать следующим образом.

Известно, что контур линии, главным образом, зависит от механизма уширения и слабо зависит от других факторов [5, 6, 7].

Например, в случае доплеровского уширения

$$\alpha_{\nu} = \alpha_0 e^{-\beta \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2}; \quad \beta = \frac{hc^2}{2RT}; \quad \nu_0 = 7,16 \cdot 10^{-7} \nu_0 \sqrt{\frac{T}{M}}$$

$M$  - молекулярный вес.

Здесь  $f_1 = \alpha_0$ ,  $\Delta \nu = \frac{\beta}{\nu_0^2}$

В случае штарковского уширения ионами по теории Хольцмарка

( см [7] )

$$x \cdot \left( \frac{\Delta \bar{\nu}}{\nu - \nu_0} \right)^{3/k-1} \exp \left\{ - \left( \frac{\Delta \bar{\nu}}{\nu - \nu_0} \right)^{3/k} \right\}$$

$$\Delta \bar{\nu} = \frac{C_k}{\langle \nu_0^k \rangle}$$

Для линейного Штарк - эффекта  $k = 2$ ,  $\Delta \bar{\nu} = N_e^{2/3}$  )

$N_e$  концентрация электронов

$r$  расстояние между частицами

в случае ударного уширения электронами  $x_{\nu} \sim \frac{1}{1 + \left( \frac{\nu - \nu_0}{\gamma} \right)^2}$

$$N_e \langle \sigma \nu_e \rangle \sim \frac{N_e n^4}{\nu_e^2} \quad \text{см. [6]}$$

гл. квант. число верхнего уровня.

Вообще, анализ спектроскопических данных [5,6] показывает, что если в уширении линии участвует один механизм, то существует единственная характерная полуширина  $\Delta \bar{\nu}$ .

На основании  $\mathcal{T}$  - теоремы теории размерностей отсюда следует, что справедливо соотношение (6). Если механизмов уширения несколько, то появляется несколько характерных частот  $\Delta \nu_1$ ,  $\Delta \nu_2$  и т.д. и (4) не имеет места.

Однако, в переносе излучения основную роль играют частоты  $\nu \approx \nu_0 \pm \gamma_{\nu k b}$ . Поэтому механизмы уширения, соответствующие  $\Delta \nu_k \ll \gamma_{\nu k b}$  и деформирующие центральную часть линии (рассматривается нетривиальный случай, т.е.  $x_{\nu}(\nu_0)L > 1$ ), не оказывают влияния на перенос излучения. Например, при расчете излучения интенсивных ( $x_{\nu}(\nu_0)L \gg 1$ ) линиях в плазме можно во многих случаях описывать контур линии квазистатически [8], не

учитывая доплеровского и ударного уширения в центральной части.

4. Для приложений удобно представить (6) в другой, эквивалентной форме

$$\kappa_\nu(\vec{r}) = A(\vec{r}) \hat{\alpha}(\vec{r}) S(\alpha)$$

$S(\alpha)$  - нормированный профиль линии

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) d\alpha = 1$$

$\hat{\alpha}(\vec{r})$  - характеризует ширину линии в точке  $\vec{r}$

(7)  $A(\vec{r}) = \int \kappa_\nu(\vec{r}) d\nu$  - площадь линии поглощения

$$\alpha = \hat{\alpha}(\vec{r}) (\nu - \nu_0) \quad - \text{приведенная длина волны в } \frac{\text{Å}}{c \tau}$$

Для линейного штарк - эффекта

$$(8) \quad \hat{\alpha} = \frac{10^7 \lambda_0^2}{3.75 N_e^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{\Delta \lambda}{F_0} = \frac{\lambda_0^2 (\nu - \nu_0)}{c F_0}$$

Для функции  $S(\alpha)$  для многих линий существуют подробные таблицы [6, 8, 9].

Т.к. частота и углы являются независимыми переменными, то предлагаемый метод может быть применен к задачам любой геометрии.

Рассмотрим перенос излучения в изолированной спектральной линии вдоль одного луча (а, в) в области D (см. рис. 1)

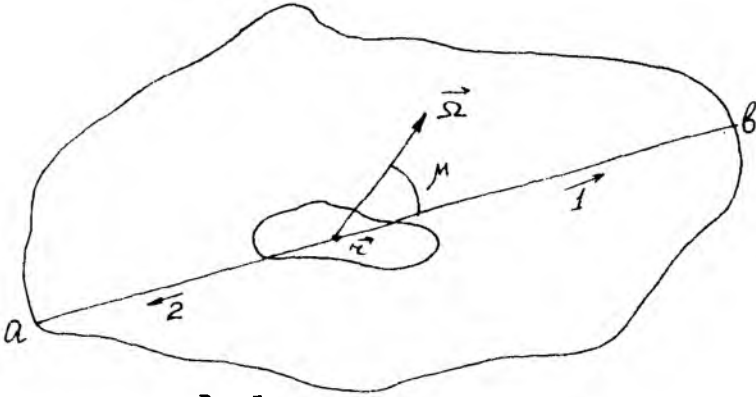


Рис. I

1 - направление прямого потока, 2 - обратного.

Внешнее излучение в рассматриваемом участке спектра

$$|V - V_0| < \gamma_{\text{экв}} \text{ отсутствует.}$$

Решение уравнения переноса вдоль луча (а, в) представим в виде

$$(9) I(a, r) = \int_V I_v(a, r) dV = \iint_V \kappa_v(x) B_v(x) e^{-\int_x^r \kappa_v(x') dx'} dx dv$$

Перейдем в (9) от  $V$  к  $\alpha$  по формулам (7) и учтем (5)

$$(10) I(a, r) = \iint_{\alpha} A(x) B(x) S(\alpha) e^{-\int_x^r A(x') S(\alpha) \hat{\alpha}(x') dx'} dx d\alpha = \\ = \int_a^r A(x) B(x) R(t(x, r)) dx,$$

где

$$(11) R(t) = \int_{\alpha} S(\alpha) e^{-t S(\alpha)} d\alpha$$

$$(12) t(x, r) = \left| \int_x^r \hat{\alpha}(x') A(x') dx' \right|$$

Заметим, что  $t(x, r)$  - размерный аналог оптической толщины между точками  $(x, r)$ . Функция  $R(t)$  зависит от формы линии



и является функцией ослабления излучения, т.е. показывает, во сколько раз уменьшилась интенсивность излучения при прохождении "оптического пути"  $t$ . Если

$$(13) \quad S(\alpha) = \frac{\Gamma}{\tau(\Gamma^2 + \alpha^2)}$$

(дисперсионный контур),  $\Gamma$  - полуширина линии в единицах  $\alpha$ , то

$$(14) \quad R(t) = e^{-\frac{t}{2\tau\Gamma}} I_0\left(\frac{t}{2\tau\Gamma}\right) \equiv \mathcal{L}_{10}(\tau),$$

где  $\tau \equiv \frac{t}{2\tau\Gamma}$  - приведенная безразмерная оптическая толщина.  
 $I_0(\tau)$  - модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка.

Тогда

$$(15) \quad I(a, z) = \int_a^z A(x) B(x) e^{-\tau(x, z)} I_0(\tau(x, z)) dx =$$

$$= 2\pi\Gamma \int_0^{\tau(a, z)} \frac{B(z)}{\hat{\alpha}(z)} e^{-z} I_0(z) dz$$

$$(16) \quad \vec{S}(\vec{r}) = \vec{\Omega} 2\pi\Gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\tau} B(z) \frac{e^{-z} I_0(z)}{\hat{\alpha}(z)} dz$$

$$\tau = \tau(\vec{a}(\mu, \varphi), \vec{r})$$

$\mu$  - косинус угла между  $\vec{\Omega}$  и направлением луча  $(\vec{a}, \vec{r})$

$\varphi$  - азимутальный угол

$a(\mu, \varphi)$  - точка на границе области  $D$  в направлении  $(\mu + \varphi, -\mu)$  (см. рис. I)

Внутренний интеграл берется вдоль луча  $(\vec{a}, \vec{r})$ .

Уравнения (10,15) можно представить в дифференциальной форме, например для (15)

$$(17) \quad \frac{dI(a, \tau)}{d\tau} = A(\tau) \left[ B(\tau) - \frac{\hat{\alpha}(\tau)}{2\pi\Gamma} I(a, \tau) \right] + A(\tau) \hat{\alpha}(\tau) \int_0^{\tau(a, \tau)} \frac{B(z)}{\hat{\alpha}(z)} \rho(z) dz,$$

где  $\rho(z) = \tau_{10}(z) + \frac{d\tau_{10}(z)}{dz}$

Формула (17) является интегральной по частоте формой уравнения переноса (3) при сделанных выше предположениях (4,5,6,13). По сравнению с переносом монохроматического излучения в правой части появляется член, учитывающий крылья линии.

Используя устойчивость дробно-линейных функционалов [2],

$$(18) \quad \frac{\int_0^{\tau} \frac{B(z) \rho(z)}{\hat{\alpha}(z)} dz}{\int_0^{\tau} \frac{B(z) \rho(z)}{\hat{\alpha}(z)} dz} = \beta$$

можно записать (17) в виде

$$(19) \quad \frac{dI(a, \tau)}{d\tau} = A(\tau) \left[ B(\tau) - \frac{\hat{\alpha}(\tau)}{2\pi\Gamma} I(a, \tau) \right] + \beta A(\tau) B(\tau) \int_0^{\tau(a, \tau)} \rho(z) dz$$

Здесь  $\beta$  - "устойчивый" коэффициент, слабо зависящий от распределения  $A, B, \hat{\alpha}$  вдоль луча  $(a, \ell)$ .

Формула (19) удобна при численных расчетах нестационарных задач, т.к. в правую часть входят лишь характеристики в точке  $\vec{r}$  и оптическая толщина  $\tau$ . Для контура (13)  $\rho(\tau) = e^{-\tau} I_1(\tau)$ .

Для любого профиля линии  $S(\alpha)$  можно затабулировать функцию  $R(t)$  (см.(11)). Исследование  $R(t)$  показывает влияние контура линии на перенос излучения.

В случае монохроматического излучения

$$R(t) \sim e^{-t}$$

Если  $S(d) \sim (\frac{1}{d})^n$  при  $d \rightarrow \infty$ , то

$$R(t) \sim t^{\frac{1}{n}-1}, \quad t \rightarrow \infty$$

Для дисперсионного контура  $n=2$ ,

$$R(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Главный член асимптотики  $R(t)$  определяется крыльями линии. Вычислив  $I$  по формулам (II), (I6), (I7) или (I9), получаем  $q$ .

1) Перенос излучения в произвольной выпуклой области  $D$ , контур (I3).

$$(20) \quad \begin{cases} q_1(\vec{r}) = A(\vec{r})B(\vec{r}) - \frac{A(\vec{r})\hat{a}(\vec{r})}{2\pi\Gamma} \int_{\vec{x}}^{\vec{r}} A(x)B(x) z_{11}(\tau(x, \vec{r})) dx \\ q(\vec{r}) = \int_{\vec{x}} q_1(\vec{r}) d\Omega \\ z_{11}(\tau) = e^{-\tau} (I_0(\tau) - I_1(\tau)) \end{cases}$$

2) Перенос излучения в аксиально или сферически симметричной области, контур (I3).

$$q(\mu) = 4\pi A(\vec{r})B(\vec{r}) - \frac{A(\vec{r})\hat{a}(\vec{r})}{\Gamma} \int_{-1}^1 d\mu \int_{\hat{a}(\mu)}^{\vec{r}} B(x)A(x) z_{11}(\tau(x, \vec{r})) dx$$

$\hat{a}(\mu)$  - точка пересечения луча с направлением  $(-\mu)$  и границы области  $D$  (см. рис. I).

5. Имея в виду расчет поля излучения в водородной плазме непрерывного оптического разряда [II], рассмотрим в качестве при-

мера перенос излучения в резонансной линии водорода  $L_{\alpha}$ . Расчет велся по (15,20).

$$\lambda_0 = 1216 \text{ \AA}$$

$$f = 0,416 \quad (\text{сила осциллятора})$$

Контур линии аппроксимировался дисперсионным с наименьшим квадратичным отклонением от гримовского [6].

$$A = 1,1 \cdot 10^{-2} N_{\text{ат}}$$

$$B = 2,2 \cdot 10^{-1} \exp \left\{ - \frac{11,8 \cdot 10^4}{T} \right\}$$

$$\hat{\lambda} = 4,06 \cdot 10^{-12} N_e^{-2/3}$$

$$v = 1 \text{ см}$$

$$a = 0.$$

$$T_{\text{н}} = 20000, \quad T_{\text{к}} = 10000^{\circ}\text{К}, \quad P = 1 \text{ ат.}$$

Назовем прямым поток от а к в.

$$1) \text{ Профиль температуры } T = T_{\text{к}} + \frac{T_{\text{к}} - T_{\text{н}}}{6} z$$

На рис.2 видно, что интенсивность излучения имеет максимум внутри отрезка  $[a, v]$ ; на  $[0; 0,4]$  происходит усиление прямого потока, на  $[0,4; 1]$  происходит резкое ослабление прямого потока и "запирание" излучения, т.к. холодный газ для него непрозрачен. Кривая I показывает структуру запирающего слоя.

2) Профиль температуры

$$T = \begin{cases} T_{\text{н}} + \frac{2}{6} (T_{\text{к}} - T_{\text{н}}) z & z < \frac{6}{2} \\ T_{\text{к}} - \frac{2}{6} (T_{\text{к}} - T_{\text{н}}) (z - \frac{6}{2}) & z > \frac{6}{2} \end{cases}$$

$$T_n = 10000^\circ\text{K}$$

$$T_k = 20000^\circ\text{K}$$

$$\rho = 1 \text{ am}$$

На рис.3 хорошо видны области  $q_{1,2} > 0$  и  $q_{1,2} < 0$ . Заметь, что в центральной части отрезка  $[a, b]$   $I \sim 100-200 \frac{\text{BT}}{\text{см}^2 \text{стер}}$  и

существенно влияет на распределение энергии в "горячей" зоне.

Интересно отметить, что функция самопоглощения  $q_{1,2}^* = 2AB - q_{1,2}$  максимальна в промежуточной точке  $z^*$ , которую можно считать границей горячей зоны для излучения ( $q_{1,2} = q_1 + q_2$ ).

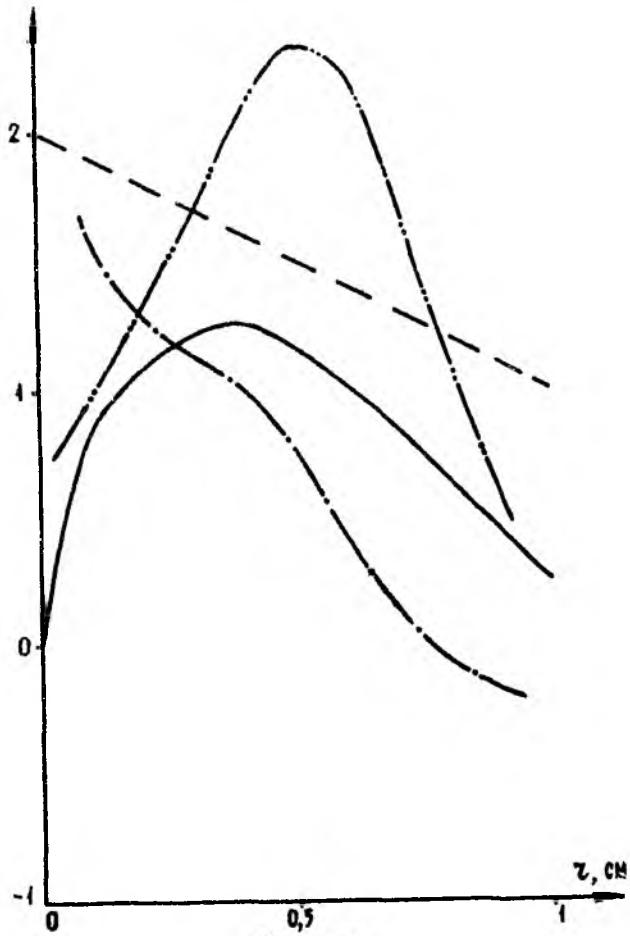
6. А. В данном методе учитывается изменение как "высоты", так и ширины спектральной линии в различных точках тела. Это является лучшей аппроксимацией коэффициента поглощения, чем в  $[2, 10]$  и др.

Б. Полученные формулы являются обобщением кривых роста для неоднородной среды.

В. Метод дает значительный выигрыш в затратах на вычисление по сравнению с прямыми спектральными методами.

Г. Показано, что интенсивные резонансные линии могут оказывать влияние на структуру плазменных образований.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю проф. Ю.П. РАЙЗЕРУ.



р<sup>о</sup> и с. 2

- $I(0, z) \cdot 10^{-2} \text{ вт/см}^2 \text{ стер}$
- · -  $q_n \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ вт/см}^2$
- · ·  $q_n^k \cdot 10^{-4} \text{ вт/см}^2$
- - -  $T \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{K}$

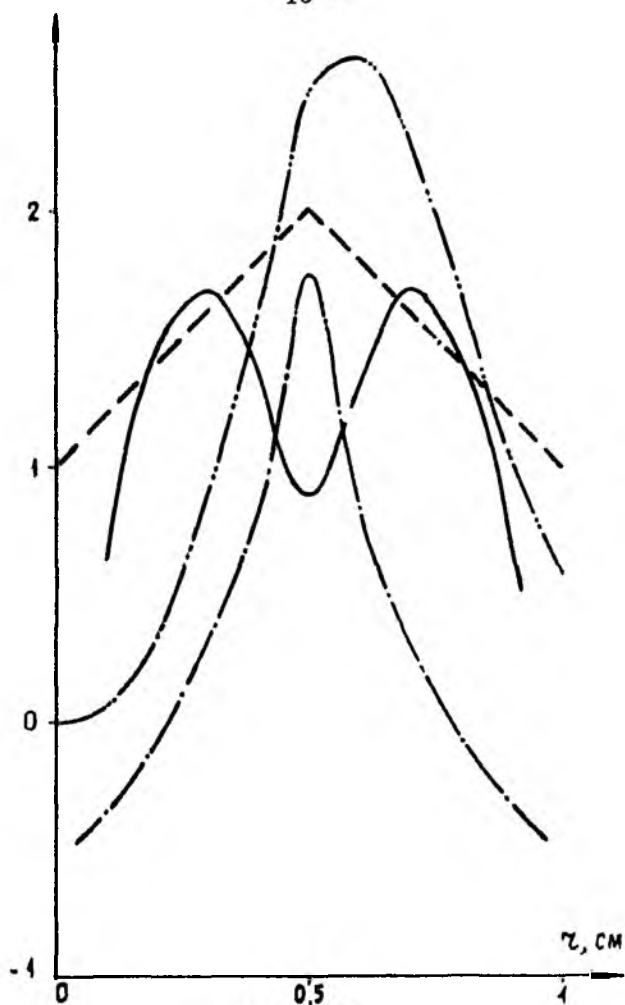


Рис. 3

- .....  $I(0, r) \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{см}^2 \text{ степ}$
- $q_{\text{из}} \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{см}^2$
- $q_{\text{в}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{см}^2$
- $T \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$

Л и т е р а т у р а

1. Я.Б.Зельдогич, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. "Наука", 1966.
2. В.Я.Гольдин, Б.Н.Четверушкин. О численном моделировании задач радиационной газовой динамики. Препринт ИПМ № 17 (1978). Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы. Препринт ИПМ № 12 (1970).
3. Л.М.Биберман, В.С.Воробьев, Г.Э.Норман. Энергия, излучаемая равновесной плазмой в спектральных линиях. Оптика и Спектроскопия, 14, 330 (1963).
4. L.V.Lasher et al. Radiation from an Isothermal Hydrogen Plasma at Temperatures up to 40000°K. JQSRT, 7, 305, (1967).
5. R.G.Breene. The Shift and Shape of Spectral Lines. Pergamon Press. N.Y., 1961.
6. Г.Грим . Спектроскопия плазмы. М.Атомиздат, 1969.
7. И.И.Собельман. О теории ширины атомных спектральных линий. УФН, 54, 558 (1954).
8. A.V.Underhill, J.A.Waddel. Stark Broadening Functions for the Hydrogen Lines. NBS. Circular No.603, (1959).
9. Касабов Г.А., Елисеев В.В. Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы. М. Атомиздат, 1973.



10. D.H.Sampson, R.T.Morton. A Semu-Grey Approximation to Non-Grey Radiative Transfer. JQSRT, 12, 1369 (1972).

11. Ю.П.Райзер. Распространение разрядов и поддержание плотной плазмы электромагнитными полями. УФН. 108, № 3, 429 (1972).

Подписано к печати 22.У.74 г                    № Т-10803 от 28.У.74 г  
Заказ № 88-74. Тираж - 200 экз.

---

Отпечатано на ротاپринте Института проблем механики АН СССР  
125040, Москва А-40, Ленинградский пр-т. 7